МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Розділ: **ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ НЕЗАЛЕЖНИХ ЗМІННИХ**

Методичні вказівки до виконання самостійних робіт для студентів
напряму підготовки 6.050504 „Зварювання”

РЕКОМЕНДОВАНО МЕТОДИЧНОЮ РАДОЮ НТУУ „КПІ”

Київ

2010

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Розділ: ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ НЕЗАЛЕЖНИХ ЗМІННИХ:

Методичні вказівки до виконання самостійних робіт для студентів напряму підготовки 6.050504 „Зварювання”

Укладачі: Довгай В.В., Мельник А.Ф., Коцюк Л.Р., 2010 – 49с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ „КПІ”

(Протокол № 9 від 20 травня 2010р.)

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Розділ: ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ НЕЗАЛЕЖНИХ ЗМІННИХ:

Методичні вказівки до виконання самостійних робіт для студентів напряму підготовки 6.050504 „Зварювання”

Укладачі: Довгай В.В., Мельник А.Ф., Коцюк Л.Р.

Рецензент: Карпенко А.С., к.т.н., доц. кафедри ЗВ НТУУ „КПІ”.

Відповідальний редактор: Рижов Р.М., д.т.н., проф.

ВСТУП

В першому семестрі програмою з вищої математики на зварювальному факультеті НТУУ „КПІ” передбачена тема „Функції кількох незалежних змінних”. При вивченні даної теми студенти знайомляться з поняттями границі та неперервності функції кількох змінних, оволодівають методами диференціювання функцій кількох змінних та деякими їх застосуваннями. Методичні вказівки написані відповідно до програми і включають основні теоретичні відомості та приклади розв'язання типових задач, а також завдання для самостійної роботи студентів і список літератури, рекомендованої для детальнішого ознайомлення з темою.

Мета пропонованих методичних вказівок – допомогти студентам зварювального факультету глибше засвоїти вказаний матеріал, розвинути навички застосування теоретичних знань до розв'язання конкретних задач та активізувати самостійну роботу студентів.

Методичні вказівки призначені для використання на практичних заняттях з вищої математики та для самостійної роботи студентів.

§1. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

В попередніх розділах курсу вивчалася функція однієї змінної. Проте досить часто в природі та в техніці явища і процеси описуються більше, ніж двома величинами. Наприклад, об’єм прямого паралелепіпеда $V = xyz$ залежить від трьох величин, де x, y - сторони основи, z - висота. За законом Ома сила струму $I = \frac{U}{R}$ є функцією двох змінних U і R; а сила взаємодії електричних зарядів $F = \varepsilon \frac{q_1 q_2}{r^2}$ залежить від величини зарядів q_1, q_2 та відстані r між ними.

Означення 1. Впорядкований набір n дійсних чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається точкою n - вимірного простору. Множина всіх таких точок складає n - вимірний простір. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називаються координатами точки.

Означення 2. Відстанню між точками $M_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $M_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ n - вимірного простору називається число

$$\rho(M_1, M_2) = |M_1 M_2| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} \tag{1}$$

Означення 3. n - вимірний простір, в якому відстань між точками визначається за формулою (1), називається n - вимірним евклідовим простором і позначається E^n.

Зокрема, E^1 - множина точок прямої, відстань між якими визначається за формулою $\rho(M_1 M_2) = |x_2 - x_1|$; E^2 - множина точок площини, для яких $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$; E^3 - множина точок простору, для яких $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. Простір E^4 використовують фізики, доповнюючи тривимірний евклідовий простір E^3 координатою часу.

Означення 4. Якщо кожній точці $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з множини $D \subset E^n$ відповідає дійсне число $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то кажуть, що на множині D задана функція n змінних. Множина D називається областю визначення функції.

Нехай задана функція двох змінних $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset E^2$. В цьому випадку D - множина точок площини, причому кожній точці $M(x, y) \in D$ відповідає дійсне число z, тобто, точка $P(x, y, z) \in E^3$. Отже, графіком функції $z = f(x, y)$ є поверхня в E^3.

Приклад 1. Знайти область визначення функції $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Розв'язання. Функція існує, якщо $1-x^2-y^2 \geq 0$, тобто, $x^2+y^2 \leq 1$. Це множина точок круга з центром в початку координат і радіусом 1 (рис.1).

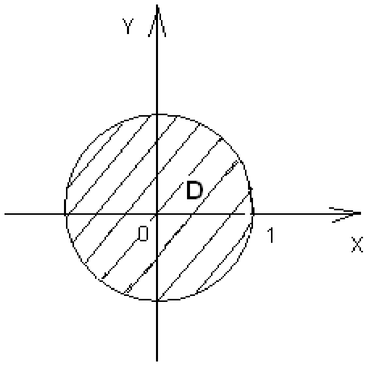

Рис.1

Приклад 2. Знайти область визначення функції $z=\arccos\dfrac{y}{x}$.

Розв'язання. Функція визначена при $\begin{cases} -1 \leq \dfrac{y}{x} \leq 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ -x \leq y \leq x \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x \leq y \leq -x \end{cases} \end{array}\right.$

Область визначення функції зображена на малюнку і містить межі області, за виключенням початку координат (рис. 2).

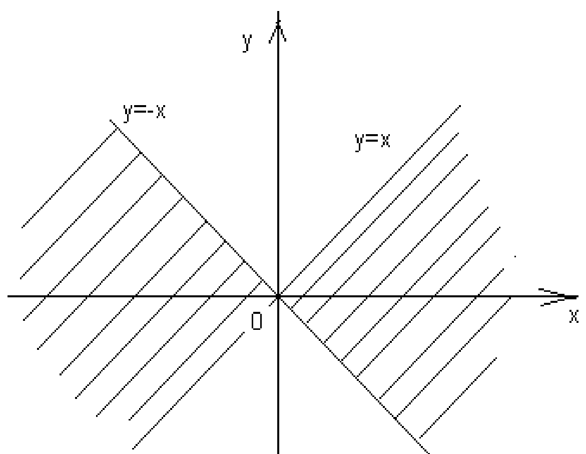

Рис. 2

§2. ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Означення 1. δ-околом точки $M_0 \in E^n$ називається множина точок $M \in E^n$ таких, що $\rho(M_0, M) < \delta.$ Позначатимемо δ -окіл точки M_0 : $O_\delta(M_0).$

Якщо $M_0(x_0) \in E^1$, то δ-околом точки є інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, якщо $M_0(x_0, y_0) \in E^2$, то $O_\delta(M_0)$ є круг $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$, при $M_0(x_0, y_0, z_0) \in E^3$ - куля $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \delta^2.$

Означення 2. Нехай функція $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задана в деякому околі точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in E^n$ за винятком, можливо, самої цієї точки. Число A називається границею функції $f(M)$ при $M \to M_0$, якщо для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що із умови $\rho(M, M_0) < \delta$ слідує $|f(M) - A| < \varepsilon.$

Тоді записують

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A$$

або

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \dots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A.$$

Зокрема, рівність $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$ означає, що при наближенні до точки $M_0(x_0, y_0)$ вздовж довільної кривої, що належить $O_\delta(M_0)$, значення функції прямують до числа A.

Означення 3. Нехай функція $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана в деякому околі точки $M_0 \in E^n$. $f(M)$ називається неперервною в точці M_0, якщо $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Функція називається неперервною в області, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Для функцій кількох незалежних змінних залишаються справедливими теореми про границі та неперервність суми, добутку, частки функцій, вже відомі для функції однієї змінної. Крім того, якщо функція $f(M)$, $M \in E^n$, неперервна в обмеженій замкненій області $D \subset E^n$, то вона в цій області обмежена: $|f(M)| \le N$; досягає своїх найменшого та найбільшого значень, тобто,

$m_0 \le f(M) \le M_0, \quad m_0 = f(M_1), \ M_0 = f(M_2), \quad M, M_1, M_2 \in D$; та приймає всі свої проміжні значення.

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Перейдемо до полярних координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Умови $x \to 0$, $y \to 0$ рівносильні умові $\rho \to 0$. Таким чином,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\sqrt{\rho^4 \sin^2\varphi\cos^2\varphi+1}-1}{\rho^2} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^4 \sin^2\varphi\cos^2\varphi+1-1}{\rho^2\left(\sqrt{\rho^4 \sin^2\varphi\cos^2\varphi+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2 \sin^2\varphi cos^2\varphi}{\sqrt{\rho^4 \sin^2\varphi\cos^2\varphi+1}+1} = 0.$$

Приклад 2. Перевірити, чи існує границя $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Нехай точка $M(x, y)$ прямує до точки $M_0(0,0)$, переміщуючись вздовж прямої $y = kx$. Тоді

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Результат залежить від k, тобто, від вибраного шляху наближення до точки M_0, а значить, границя функції не існує.

Приклад 3. Дослідити на неперервність функцію

$$z=\frac{1}{\ln\left(3-x^2-y^2-2x\right)}.$$

Розв'язання. Функція визначена та неперервна в точках (x,y), що задовольняють умовам

$$\begin{cases}3-x^2-y^2-2x>0\\ 3-x^2-y^2-2x\neq 1\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}(x+1)^2+y^2<4\\ (x+1)^2+y^2\neq 3,\end{cases}$$

тобто, в крузі з центром в точці $(-1;0)$ і радіусом 2, виключаючи точки кола з тим же самим центром і радіусом $\sqrt{3}$

§3. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Нехай функція $z=z(x,y)$ задана в деякому околі $O_\delta(M)$ точки $M(x,y)$. Надамо змінним x і y прирости Δx та Δy відповідно так, щоб $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)\in O_\delta(M)$. Вираз $\Delta z=z(x+\Delta x, y+\Delta y)-z(x,y)$ називають повним приростом функції $z(x,y)$ в точці M, а вирази $\Delta_x z=z(x+\Delta x,y)-z(x,y)$, $\Delta_y z=z(x,y+\Delta y)-z(x,y)$ - частинними приростами функції $z(x,y)$ за змінними x та y.

Означення 1. Частинною похідною за змінною x від функції $z(x,y)$ називається $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, якщо дана границя існує.

Означення 2. Частинною похідною за змінною y від функції $z(x, y)$ називається $\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$, якщо дана границя існує.

Позначатимемо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ або z'_x та $\frac{\partial z}{\partial y}$ або z'_y відповідно. З геометричної точки зору $\frac{\partial z}{\partial x}$ дорівнює тангенсу кута, що утворює з віссю OX дотична, проведена до перерізу поверхні $z = z(x, y)$ площиною $y = const$ в точці $M(x, y)$.

Так як частинний приріст $\Delta_x z$ визначається при сталому значенні y, то з означення 1 випливає, що при знаходженні частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$ слід вважати $y = const$. Аналогічно, при знаходженні $\frac{\partial z}{\partial y}$ будемо вважати, що $x = const$.

Приклад 1. Знайти частинні похідні від функції $z = arctg\frac{y}{x}$.

Розв'язання. Вважаючи величину y сталою і використовуючи правила диференціювання функції однієї змінної, знайдемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Вважаючи, що $x = const$, одержимо

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Аналогічно можна ввести поняття частинної похідної для функції довільного числа змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При знаходженні $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ всі змінні, крім x_k, вважаємо сталими величинами.

Приклад 2. Знайти частинні похідні від функції $u = x^{yz}$.

Розв'язання. Вважаючи, що $y = const, \quad z = const,$ маємо $\frac{\partial u}{\partial x} = yzx^{yz-1}$. Нехай x, z - сталі величини, тоді $\frac{\partial u}{\partial y} = x^{yz}(\ln x)z$. Якщо x, y - сталі величини, то $\frac{\partial u}{\partial z} = x^{yz}(\ln x)y$.

§4. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Нехай задана функція двох змінних $z = z(x, y)$ і $\Delta z = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y)$- повний приріст функції в точці $M(x, y)$.

Означення 1. Функція $z = z(x, y)$ називається диференційовною в точці $M(x, y)$, якщо в околі цієї точки приріст функції можна представити у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\rho,$$

де A, B не залежать від $\Delta x, \Delta y$, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, $\alpha = o(1)$ при $\Delta x \to 0, \quad \Delta y \to 0$. Головна лінійна відносно Δx і Δy частина приросту функції $z(x, y)$ називається диференціалом функції в точці $M(x, y)$ і позначається

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Теорема 1. Якщо функція $z(x, y)$ диференційовна в точці $M(x, y)$, то вона неперервна в цій точці.

Теорема 2. Якщо функція $z(x, y)$ диференційовна в точці, то вона має частинні похідні в цій точці, причому $\frac{\partial z}{\partial x} = A$, $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.

Теорема 3. Якщо функція $z(x,y)$ в околі точки $M(x,y)$ має неперервні частинні похідні, то існує диференціал функції в цій точці, який визначається за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy .$$

Для функцій з довільним числом змінних справедливі аналогічні формули. Зокрема, $du(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$.

Приклад1. Знайти диференціал функції $z = x^2 y$.

Розв'язання. $z'_x = 2xy, \quad z'_y = x^2$, отже, $dz = 2xydx + x^2 dy$.

Диференціал функції кількох змінних використовується для наближених обчислень. Нехай задана функція $z = z(x,y)$,диференційовна в точці $M_0(x_0,y_0)$. Знаючи значення функції та її частинних похідних в точці $M_0(x_0,y_0)$, знайдемо значення функції в точці $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$, близькій до точки M_0.

$$z(M) = z(M_0) + \Delta z(M_0) = z(M_0) + z'_x(M_0)\Delta x + z'_y(M_0)\Delta y + \alpha\rho,$$

де α є нескінченно мала вищого порядку малості, ніж Δx і Δy,а значить, при наближених обчисленнях може не враховуватись. Тобто, $\Delta z(M_0) \approx dz(M_0)$ і одержуємо формулу для наближених обчислень

$$z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx z(x_0,y_0) + z'_x(x_0,y_0)\Delta x + z'_y(x_0,y_0)\Delta y . \qquad (1)$$

Для функцій довільного числа змінних формула аналогічна. Наприклад,

$$u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) \approx u(x_0,y_0,z_0) + u'_x(x_0,y_0,z_0)\Delta x + u'_y(x_0,y_0,z_0)\Delta y +$$
$$+ u'_z(x_0,y_0,z_0)\Delta z .$$

Приклад 2. Обчислити наближено $(1,05)^{2,99}$.

Розв'язання. Шукане число будемо розглядати як значення функції $z = x^y$ при $x = x_0 + \Delta x,\ y = y_0 + \Delta y,$ якщо $x_0 = 1,\ y_0 = 3,\ \Delta x = 0,05,$ $\Delta y = -0,01.$

Знаходимо $z(x_0; y_0) = 1^3 = 1,\ z'_x = yx^{y-1},\ z'_y = x^y \ln x,\ z'_x(x_0; y_0) = 3,$ $z'_y(x_0; y_0) = 0,$ і за формулою (1) одержуємо
$(1,05)^{2,99} \approx 1 + 3 \cdot 0,05 + 0 \cdot (-0,01) = 1,15.$

Приклад 3. Радіус основи конуса дорівнює $10,2 \pm 0,1$см, твірна дорівнює $44,6 \pm 0,1$см. Знайти об'єм конуса і вказати похибку підрахунку.

Розв'язання. Об'єм конуса знаходимо за формулою $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H =$

$= \frac{1}{3}\pi R^2 \sqrt{l^2 - R^2}$, де R - радіус основи, H -висота, l - твірна конуса. Якщо $R = 10,2,\quad l = 44,6,$ то $V \approx 4728,00.$ Похибка обчислень $\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial V}{\partial l}\Delta l$, де $\Delta R = \pm 0,1,\quad \Delta l = \pm 0,1.$ Знаходимо диференціал функції

$$dV = \left(\frac{2}{3}\pi R\sqrt{l^2 - R^2} + \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{-R}{\sqrt{l^2 - R^2}}\right)\Delta R + \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{l}{\sqrt{l^2 - R^2}}\Delta l =$$
$$= \frac{\pi R}{3\sqrt{l^2 - R^2}}\left(\left(2l^2 - 3R^2\right)\Delta R + Rl\Delta l\right)$$

і оцінюємо модуль похибки обчислень

$$\left|\Delta V\right| \le \frac{\pi \cdot 10,2}{3\sqrt{44,6^2 - 10,2^2}}\left(\left(2 \cdot 44,6^2 - 3 \cdot 10,2^2\right) \cdot 0,1 + 10,2 \cdot 44,6 \cdot 0,1\right) \approx 101,38.$$

В даній задачі не складно знайти, що максимальне значення об'єму конуса $V_{\max} \approx 4830$ досягається в точці $R = 10,3;\quad l = 44,7$, а $V_{\min} \approx 4627$

- при $R=10{,}1;\quad l=44{,}5$, і тоді $\Delta V\approx 102$. Проте знаходження найменшого і найбільшого значення функції є, загалом, значно складніша задача, ніж оцінка похибки з допомогою диференціала.

Відповідь: $V\approx 4730 см^3$, $\Delta V\approx 100 см$.

Можна показати, що формули для знаходження диференціала суми, добутку і частки функції однієї змінної залишаються справедливими і для диференціала функції кількох незалежних змінних.

З'ясуємо геометричний зміст диференціала функції двох змінних. Нехай задана поверхня $z=z(x;y)$ і точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, що належить поверхні. Вважатимемо, що функція $z(x;y)$ диференційовна в точці M_0, тобто, повний приріст функції $z(x;y)$ в точці M_0 має вигляд

$\Delta z(M_0)=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\rho,$ де $A=z'_x(M_0),\ B=z'_y(M_0),\ \Delta x=x-x_0,$

$\Delta y=y-y_0,\ \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ і $\alpha\to 0$ при $\rho\to 0.$

Тоді довільну точку поверхні $z(x;y)$ можна задати як

$$z(x;y)=z(x_0;y_0)+\Delta z(x_0;y_0),\ \text{або}$$

$$z=z_0+A(x-x_0)+B(y-y_0)+\alpha\rho. \qquad (2)$$

Задамо рівняння

$$Z=z_0+A(x-x_0)+B(y-y_0). \qquad (3)$$

Це рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

Порівняємо аплікати точки поверхні (2) і площини (3).

$$z-Z=\alpha\rho=o(\rho),\rho\to 0(M\to M_0)$$

Площина (3) називається дотичною площиною до поверхні $z=z(x;y)$ в точці M_0. Її рівняння

$$z-z_0=z'_x(M_0)(x-x_0)+z'_y(M_0)(y-y_0), \qquad (4)$$

або $z-z_0=dz(M_0).$

Таким чином, $dz(x;y)$ в точці M_0 дорівнює приросту аплікати точки дотичної площини, проведеної до поверхні $z=z(x;y)$ в точці M_0.

Означення 2. Нормаллю до поверхні в точці M_0 називається пряма, що проходить через дану точку перпендикулярно до дотичної площини, проведеної до поверхні в точці M_0.

Використовуючи (4), одержимо рівняння нормалі до поверхні $z(x;y)$ в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$:

$$\frac{x-x_0}{z'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{z'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \qquad (5)$$

Приклад 4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z=e^{x\cos y}$ в точці $M_0(1;\pi;\frac{1}{e})$.

Розв'язання.

$$z'_x=e^{x\cos y}\cos y, \quad z'_y=-e^{x\cos y}\sin y,$$

$$z'_x(M_0)=-e^{-1}=-\frac{1}{e}, \quad z'_y(M_0)=0.$$

За формулами (4) і (5) маємо відповідно $z-\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}(x-1)+0(y-\pi)$ або $x+ez-2=0$ - рівняння дотичної площини;

$\dfrac{x-1}{-\frac{1}{e}}=\dfrac{y-\pi}{0}=\dfrac{z-\frac{1}{e}}{-1}$ або $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-\pi}{0}=\dfrac{z-\frac{1}{e}}{e}$ - рівняння нормалі.

§5. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Розглянемо функцію двох змінних $z=z(x;y)$ та її частинні похідні z'_x, z'_y, які будемо називати частинними похідними першого порядку. Якщо існують частинні похідні від z'_x і z'_y, будемо називати їх частинними похідними другого порядку і позначати

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=z''_{x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=z''_{y^2}.$$

Аналогічно вводяться частинні похідні третього, четвертого і т.д. порядків. Наприклад, $(z''_{x^2})'_y=z'''_{x^2y}=\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}.$

Частинні похідні другого чи вищого порядку, що беруться за різними змінними, називаються мішаними.

Приклад 1. Знайти частинні похідні другого порядку для функції $z=x^y$.

Розв'язання.

$z'_x=yx^{y-1},\ \ z'_y=x^y\ln x,$

$z''_{xx}=(z'_x)'_x=y(y-1)x^{y-2},\quad z''_{xy}=(z'_x)'_y=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x,$

$z''_{yx}=(z'_y)'_x=yx^{y-1}\ln x+x^y\cdot\dfrac{1}{x}=yx^{y-1}\ln x+x^{y-1},\quad z''_{yy}=(z'_y)'_y=x^y\ln^2 x.$

При розв'язанні прикладу виявилося, що $z''_{xy}=z''_{yx}$. Чи випадково це? Для мішаних частинних похідних справедлива наступна теорема.

Теорема. Якщо в околі деякої точки M_0 мішані частинні похідні, що відрізняються лише порядком диференціювання, неперервні, то вони рівні.

Аналогічно визначаються частинні похідні вищих порядків для функцій довільного числа незалежних змінних.

Приклад 2. Перевірити рівність $u'''_{xyz}=xyu''_{xy}+2xu'_x+u$ для функції $u=e^{xyz}$.

Розв'язання.

$u'_x=yze^{xyz},\quad u''_{xy}=ze^{xyz}+yze^{xyz}\cdot xz=ze^{xyz}\left(1+xyz\right),$

$$u'''_{xyz} = e^{xyz}\left(1+xyz\right) + zxye^{xyz}\left(1+xyz\right) + ze^{xyz}xy = e^{xyz}\left(1+3xyz+x^2y^2z^2\right).$$

Підставимо частинні похідні в праву частину заданої рівності:

$$xyu''_{xy} + 2xu'_x + u = xyze^{xyz}\left(1+xyz\right) + 2xyze^{xyz} + e^{xyz} = e^{xyz}\left(1+3xyz+x^2y^2z^2\right),$$

тобто, для функції $u = e^{xyz}$ задане співвідношення виконується.

Нехай функція $z\left(x;y\right)$ має в околі точки $M\left(x;y\right)$ неперервні частинні похідні z'_x і z'_y. Тоді існує диференціал функції $dz = z'_x dx + z'_y dy,$ який теж є функцією змінних x і y ($dx = \Delta x,\quad dy = \Delta y$ - прирости незалежних змінних, що не залежать від x і y). Якщо припустити, що частинні похідні другого порядку функції $z\left(x;y\right)$ теж неперервні, можемо розглядати $d\left(dz\right) = d^2 z,$ який назвемо диференціалом другого порядку. Використовуючи формулу для dz, одержимо

$$d^2 z = d\left(z'_x dx + z'_y dy\right) = d\left(z'_x\right)dx + d\left(z'_y\right)dy = \left(z''_{x^2}dx + z''_{xy}dy\right)dx +$$
$$+\left(z''_{yx}dx + z''_{y^2}dy\right)dy = z''_{x^2}dx^2 + z''_{xy}dxdy + z''_{yx}dxdy + z''_{y^2}dy^2 = z''_{x^2} + 2z''_{xy}dxdy + z''_{y^2}dy^2.$$

Аналогічно вводимо диференціал третього порядку $d^3 z = d\left(d^2 z\right)$ і т.д. Диференціал $n-$го порядку $d^n z = d\left(d^{n-1}z\right)$. Якщо $z = z\left(x;y\right)$, де x і y - незалежні змінні, то для $d^n z$ справедлива символічна формула

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z,$$

яка формально розкривається як біном.

<u>Приклад 3.</u> Знайти $d^2 z$ для функції $z = \ln\left(x^2+y^2\right)$.

Розв'язання.

$$z'_x = \frac{2x}{x^2+y^2};\quad z'_y = \frac{2y}{x^2+y^2};\quad z''_{x^2} = \frac{2\left(x^2+y^2\right) - 2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$z''_{xy} = \frac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}; \quad z''_{y^2} = \frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Тоді

$$d^2z = \frac{2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\left(\left(y^2-x^2\right)dx^2 - 4xydxdy + \left(x^2-y^2\right)dy^2\right).$$

§6. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ СКЛАДЕНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай задана функція двох змінних $z = z(x; y),$ де $x = x(t), y = y(t)$ є функціями однієї змінної $t.$ Тоді $z(x(t); y(t))$ є функцією змінної t, і можна говорити про похідну $\frac{dz}{dt}.$

Припустимо, що функції $x = x(t), y = y(t)$ мають похідні в деякій точці $t,$ а функція $z(x; y)$ диференційовна у відповідній точці $(x(t); y(t)).$ Тоді

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \qquad (1)$$

Формулу (1) можна використовувати в різних варіаціях.

1) Якщо $z = z(x; y),$ де $y = \varphi(x),$ то $z = z(x; \varphi(x)),$ тобто роль змінної t відіграє змінна $x.$ Тоді за формулою (1) маємо

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

2) Нехай $z = z(x; y),$ де $x = x(u; v), y = y(u; v).$ Тоді $z(x(u; v); y(u; v))$ є функцією двох незалежних змінних u і $v.$ Припустимо, що задані функції мають неперервні частинні похідні. Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial u}.$ При цьому можемо вважати, що $v = const.$ Тоді x і y залежать тільки від $u,$ і можна використати формулу (1):

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Аналогічно,

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Одержані результати узагальнюються на випадок складеної функції довільного скінченого числа змінних.

Зокрема, якщо $f = f(x;y;z),$ де

$x=x(u;v;w), y=y(u;v;w), z=z(u;v;w),$ то

$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$ і т.д.

<u>Приклад 1.</u> Знайти похідну складеної функції $z=ye^{xy},$ де $x=t^3, y=\sin t.$

Розв'язання.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=y^2e^{xy}\cdot 3t^2+(e^{xy}+xye^{xy})\cos t=$$

$$=e^{xy}(3y^2t^2+(1+xy)\cos t)=e^{t^3\sin t}(3t^2\sin^2 t+(1+t^3\sin t)\cos t).$$

Розглянемо диференціал складеної функції $z=z(x;y),$ де $x=x(u;v), y=y(u;v),$ причому всі функції диференційовні у відповідних точках. Тоді

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot dv=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv=$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

тобто, формула для знаходження диференціала першого порядку функції $z(x;y)$ має однаковий вигляд як у випадку, коли x,y - незалежні змінні (тоді $dx=\Delta x, dy=\Delta y$), так і у випадку, коли x,y - функції (тоді $dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv, dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv$). Ця властивість називається інваріантністю диференціала першого порядку. Диференціали вищих порядків не мають властивості інваріантності.

Приклад 2. Знайти частинні похідні та диференціал складеної функції

$$z=\frac{\cos xy}{x}, \text{ якщо } x=uv, y=\frac{u}{v}.$$

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{-xy\sin xy-\cos xy}{x^2}v-\sin xy\cdot\frac{1}{v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{-xy\sin xy-\cos xy}{x^2}u-\sin xy\left(-\frac{u}{v^2}\right).$$

Тоді

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\frac{-xy\sin xy-\cos xy}{x^2}(vdu+udv)-\sin xy\left(\frac{1}{v}du-\frac{u}{v^2}dv\right).$$

§7. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ НЕЯВНО ЗАДАНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай y як функція від x визначається рівнянням

$$F(x;y)=0. \qquad (1)$$

Чи існує формула для знаходження похідної $y'(x)$ неявно заданої функції?

Теорема. Нехай рівняння $F(x;y)=0$ задає неперервну функцію $y=y(x),$ точка $M(x;y)$ задовольняє рівнянню (1), функції $F(x;y), F'_x(x;y), F'_y(x;y)$ неперервні в області $D, M\in D, F'_y(M)\neq 0.$ Тоді в точці M існує похідна $\frac{dy}{dx},$ що визначається за формулою

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)}. \qquad (2)$$

Похідні вищих порядків обчислюються послідовним диференціюванням формули (2).

Приклад 1. Знайти $\frac{dy}{dx},$ якщо $arctg\frac{x}{y}=\ln(x^2+y^2).$

Розв'язання.

$F(x;y)=arctg\frac{x}{y}-\ln(x^2+y^2).$ За формулою (2)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}-\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x}{\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)-\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y}=$$

$$=-\frac{\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}}{-\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}}=\frac{y-2x}{x+2y}.$$

Розглянемо рівняння

$$F(x;y;z)=0. \qquad (3)$$

Рівняння (3) кожній парі чисел $(x;y)\in D$ ставить у відповідність значення z (одне або декілька). Наприклад, з рівняння $x^2+y^2-z^2=0$ маємо $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}.$

Припустимо, що рівняння (3) задає неперервну функцію $z = z(x; y)$, точка $M(x; y; z)$ задовольняє рівнянню (3), функції $F(x; y; z), F'_x(x; y; z), F'_y(x; y; z), F'_z(x; y; z)$ неперервні в області D, $M \in D, F'_z(M) \neq 0.$ Тоді, поклавши спочатку $y = const,$ а потім $x = const,$ з формули (2) одержимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)}. \tag{4}$$

Аналогічні формули справедливі для неявно заданої функції довільного числа змінних.

Можна також знайти частинні похідні функції $z(x; y),$ заданої рівнянням (3), якщо обчислити повний диференціал $dF(x; y; z) =$ $= \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$ і виразити з даного рівняння $dz.$

Приклад 2. Знайти частинні похідні неявної функції $z,$ заданої рівнянням $e^{xyz} + \cos z = 1.$

Розв'язання. Перший спосіб. Позначимо $F(x; y; z) = e^{xyz} + \cos z - 1.$ Тоді за формулами (4) маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)} = -\frac{yze^{xyz}}{xye^{xyz} - \sin z} = \frac{yze^{xyz}}{\sin z - xye^{xyz}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)} = -\frac{xze^{xyz}}{xye^{xyz} - \sin z} = \frac{xze^{xyz}}{\sin z - xye^{xyz}}.$$

Другий спосіб. Знаходимо

$dF = yze^{xyz}dx + xze^{xyz}dy + (xye^{xyz} - \sin z)dz = 0,$ звідки

$dz = \dfrac{yze^{xyz}dx + xze^{xyz}dy}{\sin z - xye^{xyz}}.$ Порівнюючи з формулою

$dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy,$ знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yze^{xyz}}{\sin z-xye^{xyz}};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xze^{xyz}}{\sin z-xye^{xyz}}.$$

В §4 ми одержали рівняння дотичної площини до поверхні $z=z(x;y)$ в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ у вигляді

$$z-z_0=z'_x(M_0)(x-x_0)+z'_y(M_0)(y-y_0).$$

Якщо поверхня задана рівнянням $F(x;y;z)=0,$ то, враховуючи (4), рівняння дотичної площини запишеться як

$$z-z_0=-\frac{F'_x(M_0)}{F'_z(M_0)}(x-x_0)-\frac{F'_y(M_0)}{F'_z(M_0)}(y-y_0), \text{ або}$$

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0. \qquad (5)$$

Відповідно, рівняння нормалі до поверхні $F(x;y;z)=0$ в точці M_0 матиме вигляд

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}. \qquad (6)$$

Приклад 3. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ в точці $M_0(1;2;-1).$

Розв'язання. Позначимо ліву частину рівняння поверхні $F(x;y;z)$ і знайдемо частинні похідні функції $F(x;y;z)$ та їх значення в точці $M_0.$

$$F(x;y;z)=x^3+y^3+z^3+xyz-6,$$

$$F'_x(x;y;z)=3x^2+yz,\quad F'_x(M_0)=1,$$

$$F'_y(x;y;z)=3y^2+xz,\quad F'_y(M_0)=11,$$

$$F'_z(x;y;z)=3z^2+xy,\quad F'_z(M_0)=5.$$

За формулами (5) і (6) маємо $x-1+11(y-2)+5(z+1)=0$ або

$x+11y+5z-18=0-$ рівняння дотичної площини;

$x-1=\dfrac{y-2}{11}=\dfrac{z+1}{5}-$ рівняння нормалі.

Приклад 4. На поверхні

$x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ знайти точки, в яких дотична площина паралельна площині XOY.

Розв'язання. Якщо дотична площина паралельна площині XOY, то її вектор нормалі $\bar{N}=(F'_x(M_0);F'_y(M_0);F'_z(M_0))=(0;0;k), \quad k\neq 0.$ і точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ належить поверхні, тобто, $F(x_0;y_0;z_0)=0.$

Знаходимо частинні похідні функції $F(x;y;z)$:

$F'_x(x;y;z)=2x+2y+2z; \quad F'_y(x;y;z)=4y+2x+4z;$

$F'_z(x;y;z)=6z+2x+4y$ і складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_0+2y_0+2z_0=0 \\ 4y_0+2x_0+4z_0=0 \\ x_0^2+2y_0^2+3z_0^2+2x_0y_0+2x_0z_0+4y_0z_0=8 \end{cases}$$

З перших двох рівнянь одержимо $x_0=0, y_0=-z_0$ і, підставляючи ці значення в останнє рівняння, маємо

$$2z_0^2+3z_0^2-4z_0^2=8, \quad z_0^2=8, \quad z_0=\pm 2\sqrt{2}. \qquad k=2z_0\neq 0.$$

Отже, існують дві точки, в яких дотична площина паралельна заданій поверхні: $M_1(0;-2\sqrt{2};2\sqrt{2})$ і $M_2(0;2\sqrt{2};-2\sqrt{2}).$

§8. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Згадаємо формулу Тейлора для функції однієї змінної. Нехай функція $f(x)$ має неперервні похідні до $(n+1)-$го порядку на проміжку $[x_0;x].$ Тоді

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad (1)$$

де $c=x_0+\theta\Delta x, 0<\theta<1,$ або в диференціальній формі

$$f(x)=f(x_0)+\frac{df(x_0)}{1!}+\frac{d^2f(x_0)}{2!}+\ldots+\frac{d^nf(x_0)}{n!}+\frac{d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}.$$

Існує аналог формули (1) для функції двох змінних. Якщо функція $z=z(x;y)$ має неперервні частинні похідні до $(n+1)-$го порядку в околі $O_б(M_0)$ точки $M_0(x_0;y_0),$ то для довільної точки $M(x;y)\in O_б(M_0)$ справедлива формула Тейлора:

$$z(x;y)=z(M_0)+\frac{dz(M_0)}{1!}+\frac{d^2z(M_0)}{2!}+\ldots+\frac{d^nz(M_0)}{n!}+$$

$$+\frac{d^{n+1}z(x_0+\theta\Delta x;y_0+\theta\Delta y)}{(n+1)!}, \quad 0<\theta<1, \qquad (2)$$

або детальніше

$$z(x;y)=z(x_0;y_0)+\frac{1}{1!}(z'_x(x_0;y_0)(x-x_0)+z'_y(x_0;y_0)(y-y_0))+$$

$$+\frac{1}{2!}(z''_{x^2}(x_0;y_0)(x-x_0)^2+2z''_{xy}(x_0;y_0)(x-x_0)(y-y_0)+$$

$$+z''_{y^2}(x_0;y_0)(y-y_0)^2)+\ldots\frac{1}{n!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z(x_0;y_0)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} z(x_0+\theta\Delta x;y_0+\theta\Delta y).$$

В частинному випадку, при $x_0=0, y_0=0$ формула (2) називається формулою Маклорена.

<u>Приклад 1.</u> Функцію $z(x;y)=x^3+3x^2-2xy+y^3+7x-2y+1$ розкласти за формулою Тейлора в околі точки $M_0(1;-2).$

Розв'язання. Знаходимо $z(M_0)=z(1;-2)=12.$ Обчислимо послідовно частинні похідні функції z та їх значення в точці M_0.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+6x-2y+7,\quad \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)=20;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-2x+3y^2-2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)=8;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x+6;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0)=12;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(M_0)=-2;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0)=-12;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(M_0)=6;\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(M_0)=6.$$

Всі наступні частинні похідні тотожньо дорівнюють нулю. Підставляємо знайдені значення в формулу (2) і одержуємо шуканий розклад

$$z(x;y)=12+\frac{1}{1!}(20\Delta x+8\Delta y)+\frac{1}{2!}(12(\Delta x)^2-4\Delta x\Delta y-12(\Delta y)^2)+$$

$$+\frac{1}{3!}(6(\Delta x)^3+6(\Delta y)^3)=12+20(x-1)+8(y+2)+6(x-1)^2-$$

$$-2(x-1)(y+2)-6(y+2)^2+(x-1)^3+(y+2)^3.$$

§9. ПОХІДНА ЗА НАПРЯМОМ. ГРАДІЄНТ

Нехай в E^3 задана функція $u=u(x;y;z),$ точка $M(x;y;z)$ і промінь $l,$ що виходить з точки M в напрямі одиничного вектора $\vec{n}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma),$ де $\alpha,\beta,\gamma-$ кути, які промінь l утворює з координатними осями. Припустимо, що функція $u(x;y;z)$ диференційовна в точці M. Візьмемо на промені l деяку точку $M_1(x+\Delta x;y+\Delta y;z+\Delta z).$

Означення 1. Похідною функції $u(x;y;z)$ в точці M за напрямом променя l називається границя $\lim\limits_{M_1 \to M} \dfrac{u(M_1) - u(M)}{|MM_1|}$. Похідна функції u за напрямом l позначається $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ і знаходиться за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M) = \frac{\partial u}{\partial x}(M)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M)\cos\gamma. \qquad (1)$$

Похідна за напрямом $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ в точці M характеризує швидкість зміни функції $u(x;y;z)$ в заданій точці в напрямі l. Зокрема, частинні похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ є похідними від функції u за напрямами відповідних осей координат.

Означення 2. Градієнтом функції $u = u(x;y;z)$ в точці M називається вектор

$$grad u(M) = \frac{\partial u}{\partial x}(M)\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M)\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(M)\vec{k}. \qquad (2)$$

Формули (1) і (2) дозволяють записати

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M) = grad u(M) \cdot \vec{n}, \qquad (3)$$

або $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M) = Пр_l grad u(M)$.

З останньої формули помічаємо, що $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M)$ приймає максимальне значення, якщо напрям променя l співпадає з напрямом градієнта. Отже, $grad u(M)$ є вектор, що вказує напрям найбільшої зміни функції в заданій точці, і $|grad u(M)|$ дорівнює швидкості цієї зміни.

Для функції двох змінних $u(x;y)$ справедливі формули, аналогічні (1) – (3).

Приклад 1. Знайти похідну від функції $u = x^2y^3 + z^2 - xyz$ в точці $A(1;0;2)$ в напрямі від точки A до точки $B(3;2;1)$.

Розв'язання. Знаходимо вектор $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ і відповідний одиничний вектор $\vec{n} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{4+4+1}} = \dfrac{2}{3}\vec{i} + \dfrac{2}{3}\vec{j} - \dfrac{1}{3}\vec{k}$. Далі знайдемо $grad\,u(A)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3 - yz; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^2 - xz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z - xy;$$

$$grad\,u(A) = 0 \cdot \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}.$$

За формулою (3)

$$\frac{\partial u}{\partial l}(A) = (-2\vec{i} + 4\vec{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}\right) = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{8}{3}.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $u = z\ln x + \dfrac{x}{y}$ в точці $M(1;1;2)$ в напрямі $grad\,u(M)$ (тобто, найбільшу швидкість зміни функції u в точці M).

Розв'язання. Максимальна швидкість зміни функції в точці дорівнює модулю градієнта цієї функції. Знаходимо

$$grad\,u(M) = \left.\left(\left(\frac{z}{x} + \frac{1}{y}\right)\vec{i} - \frac{x}{y^2}\vec{j} + \ln x\vec{k}\right)\right|_M = 3\vec{i} - \vec{j}.$$

Значить, найбільша швидкість зміни функції

$$\max\frac{\partial u}{\partial l}(M) = |grad\,u(M)| = \sqrt{10}.$$

Приклад 3. Знайти кути, які утворює $grad\,u(M)$ з осями координат, якщо $M(-1;2;1)$ і $u = xyz + x^2y$.

Розв'язання.

$$grad u(M) = (yz + 2xy; xz + x^2; xy)\Big|_M = (-2; 0; -2).$$

Якщо $\alpha, \beta, \gamma -$ кути, які утворює градієнт з осями координат, то

$\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{4+4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos\beta = 0; \quad \cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$ Отже,

$\alpha = \frac{3\pi}{4}, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = \frac{3\pi}{4},$ якщо вважати, що кут між вектором і віссю не перевищує π.

§10. ЛОКАЛЬНИЙ ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Означення 1. Точка $M_0(x_0; y_0)$ називається точкою локального максимуму (мінімуму) функції $z = z(x; y)$, якщо існує окіл цієї точки $O_б(M_0)$ такий, що для всіх точок $M(x; y) \in O_б(M_0)$ виконується нерівність $z(x; y) \le z(x_0; y_0) \qquad (z(x; y) \ge z(x_0; y_0))$.

Значення функції в точці локального максимуму (мінімуму) називається локальним екстремумом, а точка $M_0(x_0; y_0) -$ точкою екстремуму.

Теорема 1. (необхідні умови існування екстремуму). Нехай функція $z(x; y)$ має локальний екстремум в точці $M_0(x_0; y_0)$ та існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ в даній точці. Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = 0. \qquad (1)$$

Умови (1) не є достатніми для існування екстремуму функції в точці. Наприклад, функція $z = xy$ має частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x,$ які в точці $M_0(0; 0)$ дорівнюють нулю, але ця точка не є точкою екстремуму, так як $z(M_0)=0,$ а в околі точки функція приймає як додатні, так і від'ємні значення.

В точці екстремуму функції частинні похідні можуть також не існувати. Наприклад, функція $z(x;y)=1-\sqrt{x^2+y^2}$ має максимум в точці $(0;0),$ так як $z(0;0)=1$ і $z(x;y)<1$ при $x^2+y^2>0.$ Частинні похідні функції $z(x;y)$: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в точці (0;0) не існують.

Точку, в якій виконуються умови (1) або хоча б одна з частинних похідних першого порядку не існує, назвемо стаціонарною точкою функції. Для дослідження функції $z(x;y)$ на екстремум в кожній з її стаціонарних точок слід перевірити виконання достатніх умов, що визначаються наступною теоремою.

Теорема 2. (достатні умови існування екстремуму). Нехай функція $z(x;y)$ має в точці $M_0(x_0;y_0)$ неперервні частинні похідні до другого порядку включно і $z'_x(M_0)=z'_y(M_0)=0.$ Позначимо через $A=z''_{x^2}(M_0),\quad B=z''_{xy}(M_0),\quad C=z''_{y^2}(M_0).$ Тоді:

1) якщо $AC-B^2>0,$ то функція $z(x;y)$ має в точці M_0 локальний екстремум, а саме: мінімум, якщо $A>0,$ і максимум, якщо $A<0;$

2) якщо $AC-B^2<0,$ то в точці M_0 екстремуму не існує;

3) якщо $AC-B^2=0,$ то питання про існування екстремуму в точці M_0 залишається відкритим.

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $z=xy(1-x-y).$

Розв'язання. Задана функція та її частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y(1-2x-y);\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=x(1-x-2y)$ існують для всіх дійсних x і $y.$ Для визначення стаціонарних точок розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y(1-2x-y)=0; \\ x(1-x-2y)=0. \end{cases}$$

Одержуємо точки $M_1(0;0)$, $M_2(1;0)$, $M_3(0;1)$, $M_4\left(1/3;1/3\right)$.

Знаходимо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=1-2x-2y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x;$$

і за теоремою 2 зі стаціонарних точок вибираємо точки екстремуму. Результат оформимо у вигляді таблиці (табл.1).

	$\left(0;0\right)$	$(1;0)$	$(0;1)$	$\left(1/3;1/3\right)$
A	0	0	-2	$-2/3$
B	1	-1	-1	$-1/3$
C	0	-2	0	$-2/3$
$AC-B^2$	-1	-1	-1	$1/3$
наявність екстремуму	немає	немає	немає	максимум

Табл.1

Тобто, $M_4\left(1/3;1/3\right)$ є точкою локального максимуму функції і $z_{\max}=z(M_4)=1/27.$

§11. НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ У ЗАМКНЕНІЙ ОБЛАСТІ

Нехай функція $z=z(x;y)$ визначена і неперервна в обмеженій замкненій області $D.$ За теоремою Вейєрштрасса $z(x;y)$ приймає в області D своє найменше і найбільше значення. Якщо точка $M_0(x_0;y_0)$, в якій

$z(x;y)$ набуває найбільшого (найменшого) значення, знаходиться всередині області $D,$ то M_0 є точкою екстремуму функції. Проте функція $z(x;y)$ свого найбільшого (найменшого) значення може досягати і в точках, які лежать на межі області $D.$ Отже, маємо таке правило.

Щоб знайти найбільше і найменше значення функції $z(x;y)$ в замкненій області $D,$ слід:

1) знайти стаціонарні точки функції $z(x;y)$, вибрати ті з них, які належать області D разом з деяким околом, і обчислити значення функції в цих точках (якщо даних точок скінченне число);
2) використовуючи рівняння межі області, виразити одну змінну через іншу, наприклад, $y = y(x), \quad a \le x \le b,$ і підставити в функцію $z(x;y).$ Для функції однієї змінної $z(x;y(x))$ знайти найменше та найбільше значення на $[a;b];$
3) із значень, одержаних у пунктах 1) і 2), вибрати найменше і найбільше.

Приклад 1. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 3x^3 + y^3 - x - 3y$ в замкненій області $D,$ що задана нерівностями: $x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad x + y \le 2.$

Розв'язання. Зобразимо область D (рис. 3).

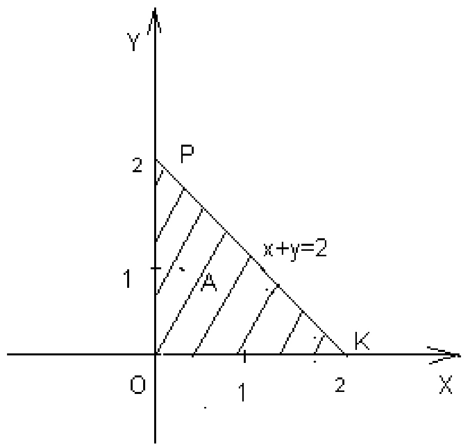

Рис. 3

Знаходимо стаціонарні точки функції $z(x;y)$.

$z'_x = 9x^2 - 1; \quad z'_y = 3y^2 - 3.$

Складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 9x^2 - 1 = 0, \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

і одержуємо стаціонарні точки $\left(\frac{1}{3};1\right)$, $\left(\frac{1}{3};-1\right)$, $\left(-\frac{1}{3};1\right)$, $\left(-\frac{1}{3};-1\right)$.

З них точка $A\left(\frac{1}{3};1\right)$ лежить всередині трикутника POK.

$z(A) = z\left(\frac{1}{3};1\right) = -2\frac{2}{9}.$

Досліджуємо функцію на межі області D, тобто, на сторонах ΔPOK.

1) На стороні OP: $x = 0$, тому $z = y^3 - 3y, \quad 0 \le y \le 2$.

$z' = 3y^2 - 3, \quad 3y^2 - 3 = 0, \quad y = \pm 1$ є стаціонарними точками z.

Відрізку $[0;2]$ належить точка $y = 1$. Знаходимо значення z в точці $B(0;1)$ і на кінцях відрізка OP:

$z(B) = z(0;1) = -2; \quad z(O) = z(0;0) = 0; \quad z(P) = z(0;2) = 2.$

2)На стороні OK: $y = 0$ і функція $z(x;y)$ набирає вигляду $z = 3x^3 - x$. Досліджуємо z на проміжку $[0;2]$: $z' = 9x^2 - 1, \;\; 9x^2 - 1 = 0, \;\; x = \pm\frac{1}{3}$.

Відрізку $[0;2]$ належить значення $x = \frac{1}{3}$. Тому знаходимо значення функції в точці $C\left(\frac{1}{3};0\right)$ і $z(K)$ ($z(0)$ вже відомо):

$z(C) = z\left(\frac{1}{3};0\right) = -\frac{2}{9}; \quad z(K) = z(2;0) = 22.$

3)Сторона PK визначається рівнянням $y = 2 - x$ і $z(x;y)$ набуває вигляду $z = 2x^3 + 6x^2 - 10x + 2, \quad x \in [0;2]$. Похідна $z' = 6x^2 + 12x - 10 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{6}}{3}$. Відрізку $[0;2]$ належить стаціонарна точка $x = \frac{2\sqrt{6} - 3}{3}$. Обчислимо

$$z(F) = z\left(\frac{2\sqrt{6} - 3}{3}; \frac{9 - 2\sqrt{6}}{3} \right) = \frac{16}{9}(9 - 4\sqrt{6}).$$

Порівнюючи значення функції $z(x;y)$ в точках A, B, P, O, C, K і F, робимо висновок, що $\max\limits_{(x;y)\in D} z(x;y) = z(2;0) = 22$ і

$\min\limits_{(x;y)\in D} z(x;y) = z\left(\frac{1}{3};1\right) = -2\frac{2}{9}$.

Приклад 2. В півкулю радіуса R вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.

Розв'язання. Виберемо прямокутну декартову систему координат у просторі так, щоб початок координат співпадав з центром основи півкулі, точкам півкулі відповідали значення $z \geq 0$ і осі координат були паралельними сторонам паралелепіпеда (рис. 4).

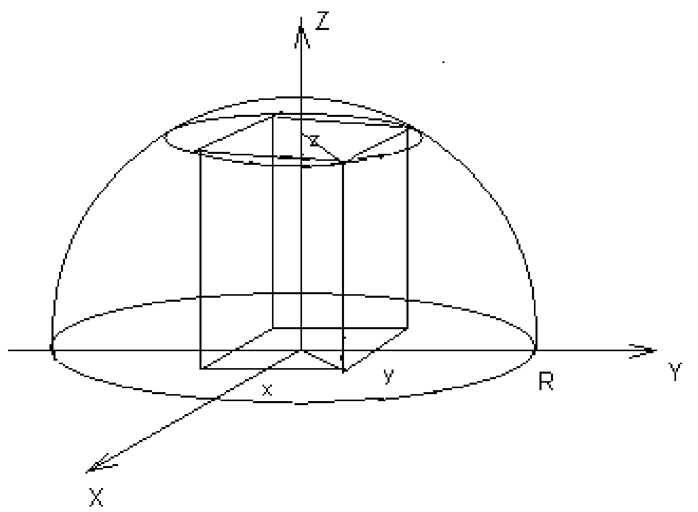

Рис.4

Нехай точка $M(x;y;z)-$ вершина паралелепіпеда, яка належить півсфері в першому октанті. Тоді $x^2+y^2+z^2=R^2, \qquad x,y,z\geq 0.$ Сторони основи паралелепіпеда $a=2x, \quad b=2y,$ висота $c=z.$ Об'єм паралелепіпеда $V=abc=4xyz.$ З рівняння сфери знаходимо $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Тоді $V=4xy\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ при умові, що $x^2+y^2\leq R^2$. Будемо шукати найбільше значення функції $V=V(x;y)$ в області $D: x^2+y^2\leq R^2.$

$$V'_x=\frac{4y(R^2-2x^2-y^2)}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}; \quad V'_y=\frac{4x(R^2-x^2-2y^2)}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

і з системи рівнянь

$$\begin{cases} R^2-2x^2-y^2=0 \\ R^2-x^2-2y^2=0 \end{cases}$$

знаходимо стаціонарну точку $x=\frac{R}{\sqrt{3}}; \quad y=\frac{R}{\sqrt{3}};$ якій відповідає значення $z=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{3}-\frac{R^2}{3}}=\frac{R}{\sqrt{3}}.$ В даній точці

$$a=\frac{2R}{\sqrt{3}}; \quad b=\frac{2R}{\sqrt{3}}; \quad c=\frac{R}{\sqrt{3}} \text{ і } V=\frac{16R^3}{3\sqrt{3}}.$$

На межі області $D: x^2+y^2=R^2, \quad z=0$ і $V=0.$ Отже $V_{\max}=\frac{16R^3}{3\sqrt{3}},$ якщо сторони паралелепіпеда дорівнюють, відповідно, $\frac{2R}{\sqrt{3}}, \quad \frac{2R}{\sqrt{3}}, \quad \frac{R}{\sqrt{3}}.$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

I.Зобразити на малюнку область визначення функції

1. $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$

2. $z=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$

3. $z=\ln(-x-y)+\sqrt{xy}$

4. $z=\sqrt{2x+3y+1}+\sqrt{x-y}$

5. $z=\ln\left(y^2-4x+8\right)$

6. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\ln(x-y)$

7. $z=\sin xy+\sqrt{xy}$

8. $z=\sqrt{3x+y}+\dfrac{1}{\sqrt{x-3y+1}}$

9. $z=\ln(4x+1)+\ln(4y-1)$

10. $z=\sqrt{4-x^2-4y^2}$

11. $z=\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x}}$

12. $z=\sqrt{x^2-y^2}$

13. $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$

14. $z=\ln\left(R^2-x^2-y^2\right)$

15. $z=\dfrac{1}{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}$

16. $z=\ln\dfrac{x}{y}$

17. $z=\arcsin\dfrac{y-1}{x}$

18. $z=\sqrt{\sin\pi\left(x^2+y^2\right)}$

19. $z=\arcsin\dfrac{y}{x^2}$

20. $z=\arccos\dfrac{x}{x+y}$

21. $z=\dfrac{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}{\sqrt{x-y^2}}$

22. $z=ctg\pi(x+y)$

23. $z=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{\ln\left(4-x^2-y^2\right)}$

24. $z=\sqrt{\dfrac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$

25. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$

26. $z=\ln\left(x^2+y^2-R^2\right)$

27. $z=\dfrac{1}{\sqrt{8+8x+4y-4x^2-y^2}}$

28. $z=\sqrt{3-x^2-2y^2}$

29. $z=\dfrac{1}{\ln\left(1-2x^2-3y^2\right)}$

30. $z=\sqrt{23+4y-4x^2-2y^2}$

II. Обчислити границю

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{x}$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

5. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{(x+y)^2}{(x^2+y^4)^2}$

6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$

7. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

8. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$

10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$

11. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{1+xy}-\sqrt{1-xy}}{\sin xy}$

12. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

13. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{tg(x^2+y^2)}{\sin(x^2+y^2)}$

14. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^4+y^4}}}{x^4+y^4}$

15. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1}-1}{x^2+(y-2)^2}$

16. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$

Показати, що границя не існує

17. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

18. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{x^2+y^2}$

19. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

20. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{|x|+|y|}$

Дослідити на неперервність функцію

21. $z = \dfrac{1}{x-y}$

22. $z = \dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$

23. $z = \dfrac{1}{\sin \pi x} + \dfrac{1}{\sin \pi y}$

24. $z = \dfrac{x^2+2y-1}{x^2+y^2}$

25. $z = \dfrac{x+y-1}{y^2-2x}$

26. $z = 2^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}$

27. $z = \dfrac{y}{y^4-x^4}$

28. $z = \dfrac{x^2+y^2}{y-2x^2}$

29. $z = \dfrac{1}{e^{x+y}-1}$

30. $z = \dfrac{1}{\sin x \sin y}$

III. Знайти частинні похідні першого порядку функції

1. $z = \ln(x^2+xy+y^2)$

2. $z = arctg\,\dfrac{y}{x}$

3. $z = e^{-x+3y}\sin(x+3y)$

4. $z = \ln(x+e^{-y})$

5. $z = e^{\frac{y}{x}}$

6. $z = \sin^2(y-ax)$

7. $z = \cos y + (y-x)\sin y$

8. $z = y\sqrt{y/x}$

9. $z = xe^{\frac{y}{x}}$

10. $z = e^{-\cos(x+2y)}$

11. $z = \ln\sin\dfrac{x}{\sqrt{y}}$

12. $z = \ln(4x^2+5y^2)$

13. $z = 3x^4+2xy^3-y^4$

14. $z = \ln(x+\dfrac{1}{y})$

15. $z = \sqrt{x^2+y^2}$

16. $z = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

17. $z = \arcsin\dfrac{x}{x+y}$

18. $z = arctg\,\dfrac{x^2}{y}$

19. $z=\dfrac{x^2}{2y}$

20. $z=\arcsin\dfrac{x^2}{y}$

21. $z=2xy+3y^2-5x$

22. $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

23. $z=ye^{\frac{x}{y}}$

24. $z=\ln\cos\dfrac{y^2}{x}$

25. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$

26. $z=xtg(xy^2)$

27. $z=\sin(x+y)+\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

28. $z=2^{x^2y+xy^3+1}$

29. $z=\arccos\dfrac{y}{x-y}$

30. $z=\log_3(2x^3+xy^2)$

IV. Обчислити наближено з допомогою диференціала

1. $2{,}993^2\cdot 3{,}004^3$

2. $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$

3. $0{,}97^{1{,}05}$

4. $\sqrt{0{,}98^2+2{,}03^3}$

5. $\sqrt[3]{2\cdot 0{,}98^2-1{,}01^2}$

6. $\dfrac{2{,}993^2}{3{,}004^3}$

7. $\sqrt{5e^{0{,}02}+2{,}03^2}$

8. $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1\right)$

9. $1{,}05^{0{,}97}$

10. $\sqrt{0{,}97^3+1{,}98^3}$

11. $arctg\left(\sqrt[4]{1{,}05}+\sqrt[3]{(0{,}02)^4}\right)$

12. $2^{\sqrt[3]{0{,}98}-\sqrt[5]{1{,}04}+2}$, $\ln 2\approx 0{,}693$

13. $\sqrt{1{,}01^3+2{,}98^2-1}$

14. $\ln\left(\sqrt[4]{(1{,}05)^3}+\sqrt[3]{0{,}03}\right)$

15. $0{,}98^{3{,}03}$

16. $\dfrac{0{,}98^3}{\sqrt[3]{1{,}04}}$

17. $arctg\sqrt{1{,}03^2-0{,}05^5}$

18. $\sqrt{11{,}97^2+9{,}01^2+7{,}98^2}$

19. $\dfrac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}97}\cdot\sqrt[4]{1{,}04^3}}$

20. $\sqrt{1{,}04^{1{,}98}+\ln 1{,}03}$

21. $\sqrt{3{,}03^2+4{,}02^2}$.

22. $\sin 29^{o} tg 46^{o}.$

23. $arctg\dfrac{1,03}{\sqrt{3,02}}.$

24. $\sqrt[3]{1,01^{2}+2,98^{3}-1}.$

25. $arctg\dfrac{2,02}{\sqrt{12,01}}.$

26. $1,002\cdot 2,003^{2}\cdot 3,004^{3}.$

27. $\dfrac{0,98^{2}}{\sqrt[4]{1,03}\cdot\sqrt[3]{1,05^{4}}}.$

28. Тіло зважили у повітрі $(4,1\pm 0,1\text{Г})$ і у воді $(1,8\pm 0,2\text{Г})$. Знайти питому вагу тіла і вказати похибку підрахунку.

29. Період коливання маятника знаходиться за формулою $T=\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$,

де l - довжина маятника, g - прискорення сили тяжіння. Показати, що відносна похибка при обчисленні T дорівнює півсумі відносних похибок, допущених при визначенні величин l і g.

30. У зрізаному конусі радіуси основ дорівнюють $R=30$ см, $r=20$ см, висота $h=40$ см. Як зміниться об'єм конуса, якщо збільшити R на 3 мм, r на 4 мм, h на 2 мм ?

V.Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні в точці $A(x_0;y_0;z_0)$.

1. $z=3x^{2}+2y^{3}-xy;\quad A(-1;3;60).$

2. $z=x^{2}+3xy+y^{2};\quad A(1;2;11).$

3. $x^{2}+y^{2}+z^{2}=169;\quad A(3,4,12).$

4. $z=xy+y^{2}-2x;\quad A(2;1;-1).$

5. $x^{3}+xyz^{2}+z^{3}+3z-3=0;\quad A(1;-2;1).$

6. $z=x^{2}+y^{2}-xy;\quad A(1;2;3).$

7. $5x^{2}y+xyz-5z^{2}+xz^{3}+2=0;\quad A(1;2;3).$

8. $z=xy+x-y;\quad A(4;2;10).$

9. $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8; \quad A(2,2,1).$

10. $z=x^2-y^2+5x-4y; \quad A(3;2;12).$

11. $z=x^2+2xy+y^2; \quad A(-1;3;4).$

12. $z=y+\ln\dfrac{x}{z}; \quad A(1,1,1).$

13. $z=2xy+3y^2-5x; \quad A(2;1;-3).$

14. $2xz^2+y^3z-5xy+5xyz-4=0; \quad A\left(2;-1;2\right).$

15. $z=y^2-xy-x^2; \quad A(-4;5;29).$

16. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1; \quad A\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3},\dfrac{b\sqrt{3}}{3},\dfrac{c\sqrt{3}}{3}\right).$

17. $z=x^2+y^2; \quad A(1,2,5).$

18. $3x^4-4y^3z+4z^2xy-4z^3x+1=0; \quad A(1,1,1).$

19. $z=arctg\dfrac{y}{x}; \quad A\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right).$

20. $(z^2-x^2)xyz-y^5=5; \quad A(1,1,2).$

21. $z=xy-2x-y; \quad A(1;3;-2).$

22. $4+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x+y+z; \quad A(2,3,6).$

На поверхні $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ знайти точки, в яких дотична площина паралельна

23. площині XOZ;

24. площині YOZ;

25. $x-z=0$;

26. $y-z=0$;

27. $x-y=0$;

28. $x+z=0$;

29. $y+z=0$;

30. $x+y=0$.

VI. Перевірити рівність $z''_{xy} = z''_{yx}$ для функції

1. $z = y^x$.

2. $z = xy^2 - 5x^3y^2 + y^4$.

3. $z = 10^{xy}$.

4. $z = e^x(\cos y + x\sin y)$.

5. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

6. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

7. $z = \ln(x^2 + y^2)$.

8. $z = \sin(xy)$.

9. $z = \cos(xy)$.

Перевірити рівність $u''_{xz} = u''_{zx}$ для функції

10. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

11. $u = (xy)^z$.

12. $u = xy^z$.

13. $u = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

14. $u = z^{xy}$.

15. $u = yx^z$.

Перевірити рівність $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ для функції

16. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

17. $u = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

18. $u = e^x \cos y$.

19. $u = arctg\,\dfrac{y}{x}$.

20. $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$. Показати, що $xz'_x + yz'_y = 2$.

21. $z = e^{-x+3y}\sin(x + 3y)$. Показати, що $z''_{y^2} - 9z''_{x^2} = 0$.

22. $z = \ln(x + e^{-y})$. Показати, що $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

23. $z = e^{y/x}$. Показати, що $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) - y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

24. $z = \sin^2(y - ax)$. Показати, що $a^2 z''_{yy} = z''_{xx}$.

25. $z = \cos y + (y - x)\sin y$. Показати, що $(x - y)z''_{xy} = z'_y$.

26. $z = y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$. Показати, що $x^2 z''_{xx} - y^2 z''_{yy} = 0$.

27. $z = xe^{y/x}$. Показати, що $x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy} = 0$.

28. $z = e^{-\cos(x+at)}$. Показати, що $a^2 z''_{xx} = z''_{tt}$.

29. $z = \ln(e^x + e^y)$. Показати, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$.

30. $z = \dfrac{x^2 y^2}{x + y}$. Показати, що $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

VII. Знайти частинні похідні та диференціал складеної функції

1. $z = x\sqrt{y},\quad x = u\cos v,\quad y = 2u - v$

2. $z = x^2 \ln y,\quad x = \dfrac{u}{v},\quad y = 3u - 2v$

3. $z = \ln\left(e^x + y\right),\quad x = uv,\quad y = u + v$

4. $z = xe^{xy},\quad x = uv,\quad y = u^2 + v^2$

5. $z = e^{x/y},\quad x = uv,\quad y = 3u + 2v$

6. $z = \dfrac{\sin xy}{x},\quad x = uv,\quad y = 3u - v$

7. $z = x^3 y - y^3 x,\quad x = u\cos v,\quad y = u\sin v$

8. $z = \ln\left(e^x + e^y\right),\quad x = \sqrt{u^2 + v^2},\quad y = uv$

9. $z = arctg\left(xy\right),\quad x = \dfrac{u}{v},\quad y = u^2 + v^2$

10. $z = \arcsin\dfrac{x}{y},\quad x = e^{uv},\quad y = u + v$

11. $z = arctg\dfrac{x}{y},\quad x = u + v,\quad y = 2u - 3v$

12. $z=\frac{\cos xy}{y}, \quad x=2u-v, \quad y=\frac{u}{v}$

13. $z=tg\left(2x^2-y\right), \quad x=uv, \quad y=\sqrt{u+v}$

14. $z=y^3\ln x, \quad x=\frac{u}{v}, \quad y=5u-v$

Знайти частинні похідні неявної функції z, заданої рівнянням

15. $z^3-3xyz=a^3$

16. $x+y+z=e^z$

17. $z^x=y^z$

18. $xyz=10^{x+y+z}$

19. $x^2+y^2+z^2=xyz$

20. $\frac{x}{y}+\frac{z}{x}=1$

21. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

22. $e^z-xyz=0$

23. $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$

24. $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$

25. $x^2+y^2+z^2-2xz=a^2$

26. $2\sin\left(x+2y-3z\right)=x+2y-3z$

27. $z^2=xy$

28. $x^3+y^3+z^3=2x+3y+2z+5$

29. $e^{xyz}+\sin z=1$

30. $e^{yz}=x+y+z$

VIII. Дослідити на локальний екстремум функцію

1. $z=2xy-3x^2-2y^2+10$

2. $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$

3. $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

4. $z=x^3+8y^3-6xy+1$

5. $z=2xy-4x-2y$

6. $z=e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$

7. $z=e^{\frac{y}{2}}(x^2+y)$

8. $z=x^2-xy+y^2+3x-2y+2$

9. $z=x^2+y^2-4x+4y$

10. $z=x^2+y^2+xy-2x-y$

11. $z=x^2+y^2+xy-2x-y$

12. $z=x^2+xy+y^2-3x-6y+4$

13. $z = x^3 + y^3 - 3xy$

14. $z = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$

15. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 2z$

16. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$

17. $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$

18. $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$

19. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

20. $z = xy^2(1 - x - y)$

21. $z = x^3 + y^3 - 15xy$

22. $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$

23. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$

24. $z = 2x^2 - 3y^2 + 4x + 6y + 3$

25. $z = x^3y^2(1 - x - y)$

26. $z = x^2 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y$

27. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

28. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$

29. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y$

30. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

IX.Знайти: 1) похідну функції $u(x, y, z)$ в точці M за напрямом від точки M до точки N; 2) градієнт функції $u(x, y, z)$ в точці M.

1. $u = xy^2 - xyz + z^3, M(1,1,2), N(2,1,4).$
2. $u = xe^y + ye^x - z^2, M(3,0,2), N(4,1,3).$
3. $u = \ln(x^2 + y^2) + 4\sqrt{z}, M(1,1,2), N(2,3,-1).$
4. $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}, M(2,4,4), N(-2,5,4).$
5. $u = arctg\, y/x + yz, \quad M(2,2,-1), \quad N(1,3,-1).$
6. $u = \sqrt{xy} + \ln(1 + z^2), \quad M(1,1,1), \quad N(0,-2,5).$
7. $u = z^2 - arctg(x + y), \quad M(1,1,2), \quad N(-1,1,4).$
8. $u = \ln(xy + yz) - \sqrt{xz}, \quad M(0,1,1), \quad N(1,0,1).$
9. $u = x^{yz} + x/y, \quad M(1,1,1), \quad N(-1,2,1).$
10. $u = \sqrt{x + y^2 + z^3}, \quad M(0,-1,1), \quad N(-2,-1,3).$

11. $u = xy^2 - arctg\sqrt{z}, \quad M(1,2,1), \quad N(-1,2,3).$

12. $u = e^{yz}\sin xy, \quad M(1,\pi,0), \quad N(2,\pi,-1).$

13. $u = xy\sqrt{z} + z/x, \quad M(1,-1,4), \quad N(-2,-1,1).$

14. $u = \ln(z + \sqrt{x^2 + y^2}), \quad M(1,1,0), \quad N(-3,1,4).$

15. $u = x^2 + 2arctg(y - z), \quad M(-1,1,2), \quad N(-1,2,-2).$

16. $u = z\ln x - \sqrt{xy}, \quad M(1,4,2), \quad N(2,3,3).$

17. $u = z^4 + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad M(-1,1,1), \quad N(1,1,5).$

18. $u = \arcsin z/x + y, \quad M(3,1,-1), \quad N(2,-1,-1).$

19. $u = ze^{x/y}, \quad M(1,1,1/e), \quad N(2,3,1/e).$

20. $u = xy^2z^3 - \ln(x-1), \quad M(2,2,-1), \quad N(2,3,6).$

21. $u = arctgx\, y/z, \quad M(-1,2,-1), \quad N(0,-2,-1).$

22. $u = \sqrt{x}\big/y - y\ln(z^2 + 1), \quad M(4,2,0), \quad N(2,1,1).$

23. $u = x\sqrt[3]{y} + y\sqrt[3]{z}, \quad M(3,1,-8), \quad N(2,1,-1).$

24. $u = y\sqrt{z} + \ln(x^2 + y^2), \quad M(-1,1,4), \quad N(1,-1,2).$

25. $u = 2\sqrt{y+z} + yarctgx, \quad M(1,-2,3), \quad N(2,-2,4).$

26. $u = z\left[\ln(1 + y^2) + arctgx\right], \quad M(1,0,2), \quad N(-1,1,0).$

27. $u = x^2y + \sqrt{1 + yz^2}, \quad M(1,-2,1/2), \quad N(1,2,-1/2).$

28. $u = z^2\arccos\sqrt{xy}, \quad M(1/2,1/2,1), \quad N(-1/2,-1/2,2).$

29. $u = z\sqrt{z}arctg(x - y), \quad M(1,-1,4), \quad N(-1,-2,4).$

30. $u = \ln(x + y) - \arcsin xz, \quad M(0,1,2), \quad N(1,2,-2).$

X.Знайти найбільше та найменше значення функції $z = z(x;y)$ в замкненій області D, що задана нерівностями. Зробити малюнок.

1. $z = 10 + 2xy - x^2, \quad D: \quad 0 \le y \le 4 - x^2.$

2. $z = x + y, \quad D: \quad x^2 + y^2 \le 1.$

3. $z = x^2 + 3y^3 + x - y, \quad D: \quad x \le 1, \quad y \le 1, \quad x + y \ge 1.$

4. $z = x^2 - y^2, \quad D: \quad x^2 + y^2 \le 4.$

5. $z = x^3 + y^3 - 3xy, \quad D: \quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 3.$

6. $z = xy, \quad D: \quad x^2 + y^2 \le 1.$

7. $z = x^2 - xy + y^2 - 4x, \quad D: \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad 2x + 3y \le 12.$

8. $z = xy + x + y, \quad D: \quad 1 \le x \le 2, \quad 2 \le y \le 3.$

9. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy, \quad D: \quad \frac{1}{3}x^2 \le y \le 3.$

10. $z = 2x + y - xy, \quad D: \quad 0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 4.$

11. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y, \quad D: \quad x \le 0, \quad y \le 0, \quad x + y + 3 \ge 0.$

12. $z = x^2 + xy - 2, \quad D: \quad 4x^2 - 4 \le y \le 0.$

13. $z = xy^2, \quad D: \quad x^2 + y^2 \le 1.$

14. $z = x^3 + y^3 - 3xy, \quad D: \quad 0 \le x \le 2, \quad -1 \le y \le 2.$

15. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y, \quad D: \quad -1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 3.$

16. $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y), \quad D: \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}.$

17. $z = x^2 + 3y^2 + x - y, \quad D: \quad x \le 1, \quad y \le 1, \quad x + y \ge 1.$

18. $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y), \quad D: \quad 0 \le x \le \frac{3\pi}{2}, \quad 0 \le y \le \frac{3\pi}{2}.$

19. $z = \cos x \cos y \cos(x + y), \quad D: \quad 0 \le x \le \pi, \quad 0 \le y \le \pi.$

20. $z = e^{-x^2 - y^2}(2x^2 + 3y^2), \quad D: \quad x^2 + y^2 \le 4.$

21. $z = x - 2y - 3;\ D:\quad 0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 1,\quad 0 \le x + y \le 1.$

22. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y;\quad D:\quad x^2 + y^2 \le 25.$

23. $z = x^2 - xy + y^2;\ D:\quad |x| + |y| \le 1.$

24. При яких розмірах відкрита прямокутна ванна даної місткості V має найменшу поверхню?

25. При яких розмірах відкрита циліндрична ванна з напівкруглим поперечним перерізом, поверхня якої дорівнює $S,$ має найбільшу місткість?

26. У прямий круговий конус, твірна якого l нахилена до площини основи під кутом $\alpha,$ вписати прямокутний паралелепіпед з найбільшою повною поверхнею.

27. Знайти прямокутник даного периметра $2p$, який обертанням навколо однієї зі своїх сторін утворює тіло найбільшого об'єму.

28. У даний прямий круговий конус вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.

29. В еліпсоїд $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.

30. Знайти найкоротшу відстань між параболою $y = x^2$ і прямою $x - y - 2 = 0.$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1.Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. т. 1 – М.: Наука, 1976.

2.Бугров Я. С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1984.

3.Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Посібник для вузів. – К.: Видав. А.С.К., 2001.

4.Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1975.

5.Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1972.

6.Вища математика. Збірник задач за ред. В.П.Дубовика, І.І.Юрика. – К.: Видав. А.С.К., 2003.

ЗМІСТ