МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Розділ: ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ

За напрямом 6.050504 "зварювання"

РЕКОМЕНДОВАНО МЕТОДИЧНОЮ РАДОЮ НТУУ «КПІ»

Київ 2010

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Методичні вказівки

За напрямом 6.050504 “Зварювання”

Укладачі: Довгай В.В., Мельник А.Ф., Коцюк Л.Р., 2010 р., 51 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ “КПІ”

(протокол №____ від _________________ 2010 р.)

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Методичні вказівки

За напрямом 6.050504 “Зварювання”

Укладачі: Довгай В.В., Мельник А.Ф., Коцюк Л.Р.

Рецензент: Голошубов В.І., к. т. н., доц. каф. ЕЗУ

Відповідальний редактор: Кузнецов В.Д., д. т. н., проф. каф. ВДМ

ВСТУП

Методичні вказівки “Лінійна алгебра та аналітична геометрія” укладені для студентів зварювального факультету з метою забезпечення виконання ними самостійної роботи, що передбачена навчальною програмою з вищої математики та розробленою на її основі робочою навчальною програмою кредитного модуля “Аналітична геометрія та диференціальне числення” для напрямку підготовки бакалавра 6.050504 “Зварювання”.

Методичні вказівки складаються з трьох розділів. В першому розділі коротко викладено необхідний теоретичний матеріал з лінійної та векторної алгебри, наведено основні означення відповідних математичних понять та формули для розрахунків. Другий розділ, що має подібну до першого структуру, присвячено таким лінійним образам аналітичної геометрії, як пряма та площина. Для кращого їх сприйняття наводиться достатня кількість малюнків. Обидва розділи містять багато прикладів детального розв’язування типових задач з лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії. В третьому розділі містяться задачі для самостійної роботи студентів, якою можуть бути домашні завдання, модульні або домашні контрольні роботи.

Підбір матеріалу і його викладення в методичних вказівках “Лінійна алгебра та аналітична геометрія” дозволяє використовувати їх як для денної, так і для заочної форми навчання студентів.

РОЗДІЛ І. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1. Обчислення визначників квадратних матриць

Матрицею називається довільна прямокутна таблиця виду

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{21} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

де $a_{ij}(i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,m)$ – дійсні числа, що називаються елементами матриці A і стоять на перетині i-того рядка та j-того стовбця даної матриці, n,m – кількість рядків і стовбців відповідно, при цьому говорять, що A має розмірність $n \times m$. Використовують також позначення

$$A = \lfloor a_{ij} \rfloor,\ i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,m.$$

Якщо n = m, то матриця A називається квадратною.

Визначником матриці A розмірності 2×2 (визначником другого порядку) називається число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Визначником матриці A розмірності 3×3 (визначником третього порядку) називається число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$
$$- (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}).$$

Визначник n-того порядку обчислюється шляхом розкладу його по елементах i-того рядка або j-того стовбця з допомогою формули

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} =$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \left(i, j = 1,2, \ldots n\right),$$

де $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, M_{ij} – визначник n – 1 порядку, який одержується з Δ викреслюванням його i-того рядка та j-того стовбця. Вираз $A_{ij}\left(i, j = 1,2, \ldots, n\right)$ називається ***алгебраїчним доповненням*** елемента a_{ij}, а M_{ij} – ***мінором*** того ж елемента. Щоб зменшити кількість доданків у попередній формулі, слід утворити якомога більше нулів у i-тому рядку або j-тому стовбцю з допомогою наступних ***властивостей визначника***

1. При перестановці місцями довільних двох рядків або стовбців визначника його знак міняється на протилежний.
2. Якщо всі елементи довільного рядка або стовбця визначника помножити на одне й те саме дійсне число, то його значення помножиться на це число.
3. Значення визначника не зміниться, якщо до всіх елементів довільного його рядка або стовбця додати відповідні елементи іншого рядка або стовбця, помножені на одне й те саме число.

Приклад. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Віднімаємо від кожного елемента першого стовбця відповідні елементи четвертого стовбця, а потім від кожного елемента четвертого рядка віднімаємо відповідні елементи другого рядка

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&6&3&7\\1&5&7&2\\0&4&3&5\\1&6&5&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&6&3&7\\1&5&7&2\\0&4&3&5\\0&1&-2&2\end{vmatrix}.$$

Розкладаємо останній визначник по елементах першого стовбця, після чого обчислюємо визначник третього порядку

$$\Delta=0+(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}6&3&7\\4&3&5\\1&-2&2\end{vmatrix}+0+0=$$

$$=-(6\cdot3\cdot2+3\cdot5\cdot1+7\cdot4\cdot(-2)-(7\cdot3\cdot1+3\cdot4\cdot2+6\cdot5\cdot(-2)))=$$

$$=-(36+15-56-(21+24-60))=-(-5+15)=-10.$$

Зауважимо, що для позначення визначника квадратної матриці A застосовується також позначення $\Delta=\det(A)$.

2. Дії з матрицями

1. ***Транспонування.*** Матриця A^T розмірності $m\times n$ називається транспонованою по відношенню до матриці A розмірності $n\times m$, якщо рядки A^T є відповідними стовбцями A.
2. ***Множення матриці на число.*** Добутком $n\times m$ матриці $A=\lfloor a_{ij}\rfloor,\ (i=1,2,\mathbf{K},n;\ j=1,2,\mathbf{K},m)$ на дійсне число λ називається матриця $\lambda A=\lfloor \lambda a_{ij}\rfloor$ тієї ж розмірності.
3. ***Сума матриць.*** Сумою двох матриць $A=\lfloor a_{ij}\rfloor,\ B=\lfloor b_{ij}\rfloor$ однієї розмірності називається матриця $A+B=\lfloor a_{ij}+b_{ij}\rfloor$ тієї ж розмірності.
4. ***Добуток матриць.*** Добутком $n\times m$ матриці $A=\lfloor a_{ij}\rfloor,\ (i=1,2,\mathbf{K},n;\ j=1,2,\mathbf{K},m)$ на $m\times k$ матрицю $B=\lfloor b_{js}\rfloor,\ (j=1,2,\mathbf{K},m;\ s=1,2,\mathbf{K},k)$ називається матриця

$$AB = \left[\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{js}\right], \ (i = 1,2,\ldots,n;\ s = 1,2,\ldots,k) \text{ розмірності } n \times k.$$

Приклад 1. Обчислити $2A - B^T$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Послідовно маємо

$$2A - B^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -4 \\ -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Приклад 2. Обчислити АВ, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Згідно з означенням добутку двох матриць одержуємо

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 - 1\cdot 3 & 1\cdot 1 - 2\cdot 2 + 0 \\ 3\cdot 2 + 2\cdot 1 + 1\cdot 3 & 3\cdot 1 - 2\cdot 2 + 0 \\ 0 + 1\cdot 1 + 4\cdot 3 & 0 - 1\cdot 2 + 0 \\ 2\cdot 2 + 3\cdot 1 + 0 & 2\cdot 1 - 3\cdot 2 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2-3 & 1-4 \\ 6+2+3 & 3-4 \\ 1+12 & -2 \\ 4+3 & 2-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 11 & -1 \\ 13 & -2 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}.$$

3. Ранг матриці та його обчислення

Рангом матриці А розмірності $n \times m$ називається найбільший порядок r відмінного від нуля визначника, складеного з елементів А, які стоять на перетинах довільних r рядків та r стовбців А. Те, що r є рангом А, записують у вигляді рівності $r = \text{rang}(A)$. Ранг матриці А можна обчислити з допомогою наступних ***елементарних перетворень***

1. Заміна місцями довільних двох рядків або стовбців А.
2. Множення всіх елементів довільного рядка або стовбця А на одне й те

ж саме дійсне число, відмінне від нуля.

3. Додавання до всіх елементів довільного рядка або стовбця A відповідних елементів іншого рядка або стовбця, помножених на одне й те саме число.
4. Вилучення рядка або стовбця A, всі елементи якого рівні нулю.
5. Вилучення рядка або стовбця A, всі елементи якого пропорційні відповідним елементам іншого рядка або стовбця з одним і тим же коефіцієнтом пропорційності.

Застосовуючи послідовно ці перетворення, матрицю A приводять до вигляду

$$E_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Така матриця розмірності $r \times r$, на головній діагоналі якої стоять одиниці а всі інші рівні нулю, називається ***одиничною***. Число r і буде рангом даної матриці.

<u>Приклад.</u> Обчислити ранг матриці A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & 10 & 8 \end{bmatrix}.$$

Додаємо до елементів першого, третього, четвертого та п’ятого стовбців відповідні елементи другого, помножені на 2, 3, –1 та 1. Після цього вилучаємо третій та четвертий стовбець, елементи яких пропорційні елементам п’ятого з коефіцієнтами пропорційності 8 та5 відповідно

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -8 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & -8 & 5 & 1 \\ -3 & -5 & -24 & 15 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Додаємо до елементів третього та четвертого рядків відповідні елементи другого, помножені на –1 та –3. Вилучаємо третій та четвертий рядки, елементи яких пропорційні елементам першого

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вилучаємо третій стовбець, елементи якого пропорційні елементам першого, після чого додаємо до елементів першого рядка відповідні елементи другого, помножені на –1

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Додаємо до елементів другого рядка відповідні елементи першого, множимо всі елементи другого рядка на –1 та одержуємо остаточний результат

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2 .$$

Звідси випливає, що $r = \mathrm{rang}(A) = 2$.

4. Обернена матриця та її знаходження

Матриця A^{-1} розмірності $n \times n$ називається ***оберненою*** до матриці $A = \lfloor a_{ij} \rfloor, (i, j = 1,2,\mathbf{K}, n)$ тієї ж розмірності, якщо $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$.

Якщо $\Delta = \det(A) \neq 0$, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{21} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}^{T},$$

де $A_{ij}(i, j = 1,2,\ldots,n)$ – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

<u>Приклад.</u> Знайти матрицю, обернену до наступної

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Спочатку обчислюємо визначник даної матриці

$$\Delta = 6 + 0 + 2 - (0 - 1 - 8) = 17 \neq 0 .$$

Отже обернена матриця існує. Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -1,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Згідно з формулою знаходимо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}^{T} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

5. Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Спочатку розглянемо систему n рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Тут $a_{ij}, b_j \left(i, j = 1,2,\ldots,n\right)$ – сталі дійсні числа, $x_j \left(j = 1,2,\ldots,n\right)$ – невідомі. Введемо позначення

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

з допомогою яких дана система записується у вигляді $AX = B$. Матриця A називається основною матрицею системи, B таX містять її вільні члени та невідомі. Нехай $\Delta = \det(A) \neq 0$, тоді існує обернена матриця A^{-1} і розв'язок системи у матричному виді дається формулою $X = A^{-1}B$. Це – ***матричний метод*** розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. З нього випливають ***формули Крамера***

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

що дають розв'язок даної системи у скалярному вигляді. В цих формулах $\Delta_j \,(j = 1,2,\ldots n)$ – визначники, що одержуються з Δ шляхом заміни його j-того стовбця на матрицю вільних членів B.

Нарешті розглянемо систему m рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Випишемо основну матрицю цієї системи

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

до якої допишемо справа стовбець вільних членів. Одержимо наступну матрицю, яку назвемо розширеною матрицею даної системи

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Будемо виконувати елементарні перетворення цієї матриці, але лише ті, що стосуються її рядків. При необхідності стовбці можна лише міняти місцями в межах основної матриці, перепозначаючи відповідним чином невідомі. Очевидно, цим перетворенням відповідають еквівалентні перетворення даної системи. З допомогою таких перетворень матрицю A^* завжди можна привести до вигляду

$$A^* = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1k} & \ldots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \ldots & c_{2k} & \ldots & c_{2n} & d_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & c_{kk} & \ldots & c_{kn} & d_k \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & d_{k+1} \end{bmatrix} = C^*,$$

де $c_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $k = \mathrm{rang}(A)$. Останній рядок матриці C^* відповідає рівнянню $0 = d_{k+1}$, звідки робимо висновок

1) якщо $d_{k+1} \neq 0$, то дана система *не має розв'язку*, тобто *несумісна*.
2) якщо $d_{k+1} = 0$, то дана система *сумісна*. Для знаходження її розв'язків виписуємо відповідну C^* систему, еквівалентну даній

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1k}x_k + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\
\qquad\quad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2k}x_k + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\
\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad c_{kk}x_k + \ldots + c_{kn}x_n = d_k.
\end{cases}
$$

Аналізуючи одержану систему, бачимо, що

a) коли $k = n$, то вона має *єдиний розв'язок*, який послідовно знаходимо, починаючи з останнього рівняння і рухаючись до першого.

b) коли $k < n$, то система має *безліч розв'язків*, тому що невідомі $x_{k+1}, \ldots, x_n$ можна брати довільними а наступні невідомі, як і в попередньому випадку, послідовно випажаємо через $x_{k+1}, \ldots, x_n$

$$
\begin{aligned}
x_k &= \frac{1}{c_{kk}}\left(d_k - c_{kk+1}x_{k+1} - \ldots - c_{kn}x_n\right), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_2 &= \frac{1}{c_{22}}\left(d_2 - c_{23}x_3 - \ldots - c_{2k}x_k - \ldots - c_{2n}x_n\right), \\
x_1 &= \frac{1}{c_{11}}\left(d_1 - c_{12}x_2 - \ldots - c_{1k}x_k - \ldots - c_{1n}x_n\right).
\end{aligned}
$$

<u>Приклад.</u> Розв'язати систему

$$
\begin{cases}
2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\
4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\
6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\
2x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11.
\end{cases}
$$

Виписуємо розширену матрицю системи, після чого множимо послідовно всі елементи першого її рядка на $-2, -3, -1$ та додаємо до відповідних елементів другого, третього та четвертого рядків. Викреслюємо третій рядок, що має всі елементи пропорційні відповідним елементам другого. Міняємо всі знаки елементів другого рядка на протилежні і нарешті ділимо всі елементи четвертого рядка на 3 та ставимо його на місце другого

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & -4 & 9 & 10 & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Записуємо систему, еквівалентну даній

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ \quad - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Ця система має безліч розв'язків. Вважаючи значення x_4 довільним, маємо, починаючи з останнього зівняння

$$x_3 = 3 - 2x_4,\ \ x_2 = 2x_3 + 2x_4 - 2 = 4 - 2x_4,$$
$$2x_1 = 5 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0,\ \ x_1 = 0.$$

Відповідь. $x_1 = 0,\ x_2 = 4 - 2x_4,\ x_3 = 3 - 2x_4,\ x_4 -$ довільне.

6. Геометричні вектори та прямокутна декартова система координат. Поділ відрізка у даному відношенні

Геометричним вектором називається направлений відрізок у просторі, він позначається символом $\bar{a}$. Якщо точки A та B є відповідно початком та кінцем вектора $\bar{a}$, то для нього використовують також позначення $\overline{AB}$. Довжина вектора $\bar{a}$ називається його модулем і позначається символом $|\bar{a}|$. ***Нульовий вектор*** $\bar{0}$ – це вектор, у якого початок і кінець співпадають. Два вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ називаються рівними, якщо вони мають однакову довжину і направлені в одну сторону. Два вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ називаються ***колінеарними***, якщо вони розміщені на одній або на паралельних прямих. Три вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ називаються ***компланарними***, якщо вони розміщені на одній або на паралельних площинах. Помістимо початок вектора $\bar{a}$ в деяку точку A' на даній числовій осі U і позначимо через B' проекцію кінця $\bar{a}$ на U. ***Проекцією*** $\bar{a}$ на вісь U називається число $\left|\overline{A'B'}\right|$, якщо напрямки $\bar{a}$ та U співпадають, або число $-\left|\overline{A'B'}\right|$ у протилежному випадку. Проекцію $\bar{a}$ на вісь U будемо позначати символом $\text{Пр}_U\bar{a}$.

Розглянемо три взаємно перпендикулярні одиничні вектори $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ $\left(\left|\bar{i}\right| = \left|\bar{j}\right| = \left|\bar{k}\right| = 1\right)$ і помістимо їх початки в одну точку O. Через цю точку та вектори $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ проведемо числові осі OX, OY, OZ відповідно. Таким чином буде побудована система відліку, що називається ***прямокутною декартовою системою координат*** у просторі. Вектори $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ утворюють ***базис*** множини всіх векторів у просторі. При цьому довільний вектор $\bar{a}$ з цієї множини можна записати у вигляді

$$\bar{a} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) = (a_x; a_y; a_z),$$

що називається розкладом вектора $\bar{a}$ по базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Числа a_x, a_y, a_z називаються ***координатами*** $\bar{a}$ в базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, вони є проекціями $\bar{a}$ на числові осі OX, OY, OZ відповідно. Координати довільної точки M розглядаються як координати вектора $\overline{OM}$.

Точка $M(x; y; z)$ ділить відрізок

$$M_1M_2\ \left(M_1 = M_1(x_1; y_1; z_1),\ M_2 = M_2(x_2; y_2; z_2)\right)$$

у відношенні λ, якщо $\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}$. При цьому

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Приклад. Знайти точку, що ділить відрізок AB у відношенні 2:3, якщо $A = A(2;-1;4)$, $B = B(0;1;-2)$.

В цьому випадку $\lambda = \dfrac{2}{3}$ і тому згідно з наведеними формулами маємо

$$x = \frac{2+0}{1+\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{5}{3}} = \frac{6}{5}, \quad y = \frac{-1+\frac{2}{3}\cdot 1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{-3+2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{-1}{5},$$

$$z = \frac{4+\frac{2}{3}(-2)}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{12-4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{8}{5}.$$

Отже точка $M(\frac{6}{5};-\frac{1}{5};\frac{8}{5})$ ділить даний відрізок у відношенні 2:3.

7. Скалярний добуток двох векторів

Нехай маємо два вектори $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$. ***Скалярним добутком*** цих векторів називається число $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\alpha$, де α – кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$, $\alpha \in [0;\pi]$. В прямокутній декартовій системі координат $\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Застосування скалярного добутку

1) Необхідна та достатня умова перпендикулярності двох векторів

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$$

2) Обчислення кута α між двома векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}, \quad \alpha \in [0;\pi]$$

3) Обчислення проекції вектора $\bar{a}$ на напрямок $\bar{b}$

$$\text{Пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$$

Приклад. Точки $A(3, 2, -3), B(5, 1, -1), C(1, -2, 1)$ є вершинами трикутника. Знайти величину його внутрішнього кута при вершині А.

Позначимо шуканий кут, що є кутом між векторами $\overline{AB} = (2, -1, 2)$ та $\overline{AC} = (-2, -4, 4)$, через α. Тоді

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot(-2) + (-1)\cdot(-4) + 2\cdot 4}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2}} = \frac{4}{9},$$

звідки $\alpha = \arccos\frac{4}{9}$.

8. Векторний добуток двох векторів

Векторним добутком двох векторів називається вектор $\bar{a}\times\bar{b}$, що має наступні властивості

1) $\bar{a}\times\bar{b}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$
2) Якщо помістити початки векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a}\times\bar{b}$ в одну точку, то з кінця $\bar{a}\times\bar{b}$ поворот від напрямку $\bar{a}$ до напрямку $\bar{b}$ видно проти руху годинникової стрілки
3) $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\alpha$

Якщо в прямокутній декартовій системі координат $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix},$$

або, що те саме

$$\bar{a}\times\bar{b} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)$$

Застосування векторного добутку

1) Необхідна та достатня умова колінеарності двох векторів

$$\bar{a}\times\bar{b} = 0,$$

або, що те саме, $\bar{a} = \lambda\bar{b}$, де λ – деяке дійсне число.

2) Нехай $S_{\bar{a},\bar{b}}$ – площа паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ як на сторонах, при умові, що початки $\bar{a}$, $\bar{b}$ розміщені в одній точці. Тоді

$$S_{\bar{a},\bar{b}} = \left|\bar{a}\times\bar{b}\right|.$$

В частинному випадку, коли A, B, C – вершини трикутника з площею S_{ABC}, то

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$$

<u>Приклад.</u> Знайти площу трикутника з вершинами $A(1,2,0), B(3,0,-3)$, $C(5,2,6)$.

Спочатку знаходимо два вектори $\overline{AB} = (2,-2,-3)$ та $\overline{AC} = (4,0,6)$, а потім їх векторний добуток

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -12\bar{i} - 24\bar{j} + 8\bar{k} = (-12,-24,8) = 4\cdot(-3,-6,2).$$

Тепер обчислюємо площу S_{ABC} даного трикутника

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{9+36+4} = 14.$$

9. Мішаний добуток трьох векторів

Нехай маємо три вектори

$$\bar{a} = (a_x; a_y; a_z),\ \bar{b} = (b_x; b_y; b_z),\ \bar{c} = \left(c_x; c_y; c_z\right)$$

в просторі, де введена прямокутна декартова система координат. Їх ***мішаним добутком*** називається число

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right) = \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c},$$

що в декартових координатах обчислюється за формулою

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Застосування мішаного добутку

1) Необхідна та достатня умова компланарності трьох векторів

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=0$$

2) Нехай $V_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}$ – об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ як на ребрах, при умові, що початки $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ розміщені в одній точці. Тоді

$$V_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}=\left|\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)\right|.$$

В частинному випадку, коли A, B, C, D – вершини трикутної піраміди з об’ємом V_{ABCD}, то

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AD}\right)\right|.$$

<u>Приклад.</u> Обчислити об’єм V_{ABCD} трикутної піраміди з вершинами

$$A(1,1,2), B(2,3,-1), C(2,-2,4), D(-1,1,3).$$

Знаходимо вектори, що лежать на ребрах даної піраміди та мають спільний початок в одній із її вершин (наприклад, A)

$$\overline{AB}=(1,2,-3), \overline{AC}=(1,-3,2), \overline{AD}=(-2,0,1).$$

Тепер обчислюємо їх мішаний добуток

$$\left(\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AD}\right)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-3-8+0+18-2+0=5$$

та шуканий об’єм $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AD}\right)\right|=\frac{5}{6}.$

РОЗДІЛ II. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Всі наступні результати будемо розглядати у просторі, де введена прямокутна декартова система координат.

1. Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до даного вектора

Під площиною П будемо розуміти геометричне місце точок M у просторі, кожна з яких є кінцем вектора з початком у деякій фіксованій точці M_0 і перпендикулярного до даного вектора $\overline{N}$ (Рис. 1).

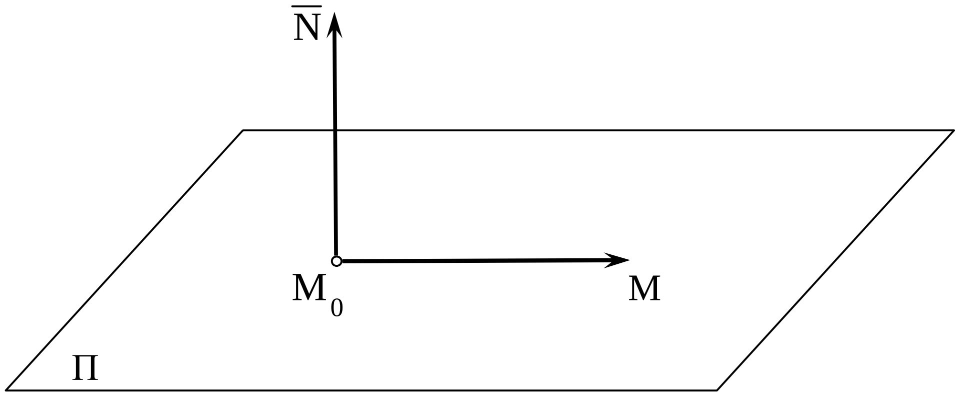

Рис. 1

Нехай маємо точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, що є початком деякого ненульового вектора $\overline{N}=(A;B;C)$. Тоді для довільної точки $M(x;y;z;)\in П$ будемо мати $\overline{N}\cdot\overline{M_0M}=0$,

або у координатній формі

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Це – рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до $\overline{N}$, що називається ***вектором нормалі***. Якщо розкрити дужки в лівій частині та ввести позначення $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, то одержимо ***загальне рівняння*** площини з вектором нормалі $\overline{N}$

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Поділимо обидві частини цього рівняння на число $\left|\overline{N}\right|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0.$$

Це рівняння називається ***нормованим рівнянням*** площини П з одиничним вектором нормалі $\overline{N}_0=\frac{\overline{N}}{\left|\overline{N}\right|}$, яке зустрічається при розв'язуванні окремих задач, пов'язаних з площиною.

<u>Приклад.</u> Скласти рівняння площини, що проходить через дві точки $M_1(1,2,3)$ та $M_2(2,-1,3)$ паралельно вектору $\overline{a}=(1,2,2)$.

Так як вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}=\overline{M_1M_2}=(1,-3,0)$ перпендикулярні до вектора нормалі $\overline{N}$ шуканої площини, то можна взяти $\overline{N}$ рівним векторному добутку $\overline{a}\times\overline{b}$, що теж перпендикулярний до $\overline{a}$ і $\overline{b}$

$$\overline{N}=\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & -3 & 0\end{vmatrix}=\overline{i}\begin{vmatrix}2 & 2\\ -3 & 0\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=6\overline{i}+2\overline{j}-5\overline{k}=(6,2,-5).$$

Тепер складаємо рівняння площини, що проходить через точку M_1 та має вектор нормалі $\overline{N}$

$$6(x-1)+2(y-2)-5(z-3)=0,\ \ 6x+2y-5z+5=0.$$

Останнє рівняння і буде загальним рівнянням площини, що задовольняє умові задачі.

2. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай маємо три фіксовані точки

$$M_1(x_1;y_1;z_1),\ M_2(x_2;y_2;z_2),\ M_3(x_3;y_3;z_3),$$

через які проходить площина П, тоді для довільної точки $M(x;y;z;)\in П$ вектори $\overline{MM_1}$, $\overline{M_2M_1}$, $\overline{M_3M_1}$ будуть компланарними, а отже

$$\left(\overline{MM_1},\overline{M_2M_1},\overline{M_3M_1}\right)=0.$$

Записуючи останню рівність в декартових координатах, одержимо рівняння площини П, що проходить через дані точки

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

<u>Приклад.</u> Знайти кут α між площиною $П_1$

$$3x-2y+z=7$$

та площиною $П_2$, що проходить через точки $M_1(1;2;-1)$, $M_2(0;3;1)$, $M_3(2;-1;3)$.

Спочатку складаємо рівняння площини $П_2$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 0-1 & 3-2 & 1+1 \\ 2-1 & -1-2 & 3+1 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}-(y-2)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}+(z+1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=0,$$

$$10(x-1)+6(y-2)+2(z+1)=0,\ 5x+3y+z-10=0.$$

Площина Π_1 має вектор нормалі $\overline{N}_1 = (3;-2;1)$, площина Π_2 має вектор нормалі $\overline{N}_2 = (5;3;1)$. Кут між Π_1 та Π_2 – це кут між $\overline{N}_1$ та $\overline{N}_2$, тому

$$\cos\alpha = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{\left|\overline{N}_1\right|\left|\overline{N}_2\right|} = \frac{3\cdot 5 - 2\cdot 3 + 1\cdot 1}{\sqrt{9+4+1}\cdot\sqrt{25+9+1}} = \frac{10}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{35}} = \frac{10}{7\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{7},$$

$$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{10}}{7}.$$

Відповідь. $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{10}}{7}$.

3. Рівняння площини у відрізках

Розглянемо площину П, що відтинає від координатних осей OX, OY, OZ відрізки a, b, c відповідно, тобто точки

$$M_1(a;0;0),\ M_2(0;b;0),\ M_3(0;0;c)$$

лежать на площині П. Як відомо, рівняння такої площини має вигляд

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислюючи визначник у лівій частині, після елементарних перетворень одержуємо рівняння

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

яке називається рівнянням площини П у відрізках.

Приклад. Знайти об’єм піраміди утвореної координатними площинами та площиною П, що має рівняння $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

Дана піраміда OABC зображена на Рис. 2.

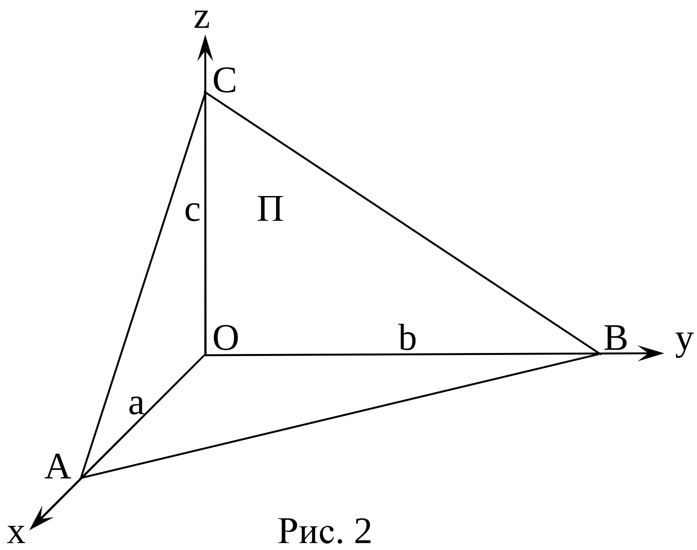

Рис. 2

Позначимо об’єм піраміди OABC через V_{OABC}, тоді $V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC$. Тут $OA = |a|$, $OB = |b|$, $OC = |c|$, де a, b, c – відрізки, що їх відтинає площина П від координатних осей Ox, Oy, Oz відповідно. Поділивши обидві частини рівняння площини П на 6, одержимо таке рівняння цієї площини у відрізках

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1, \text{ де } a = 6,\ b = 3,\ c = 2.$$

Тому $V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 = 6$.

Відповідь. $V_{OABC} = 6$.

4. Параметричні, канонічні та загальні рівняння прямої у просторі

Під прямою L будемо розуміти геометричне місце точок $M(x, y, z)$ у просторі, кожна з яких є кінцем вектора з початком у деякій фіксованій точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і колінеарного даному вектору $\bar{a} = (l, m, n)$, що називається ***напрямним*** (Рис. 3).

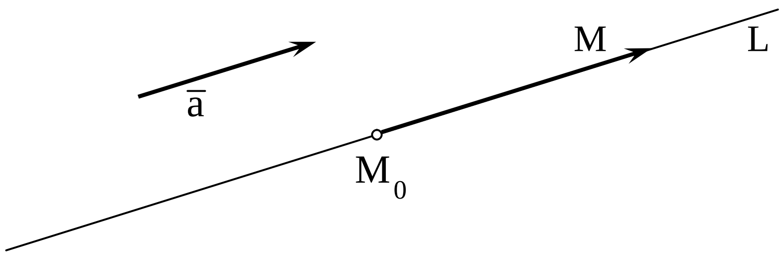

Рис. 3

Використовуючи необхідну і достатню умову колінеарності двох векторів, одержуємо $\overline{M_0M} = t\bar{a},\ t \in R$. Записуючи цю рівність у координатній формі, матимемо ***параметричні рівняння*** прямої L у просторі

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \ t \in R. \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

Виключаючи з цих рівнянь параметр t, одержуємо ***канонічні рівняння*** L

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Їх можна розуміти як частинний випадок системи двох рівнянь з трьома невідомими, що описують дві площини Π_1 та Π_2, лінією перетину яких і є пряма L. У загальному випадку ця система має вигляд

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (\Pi_1), \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (\Pi_2). \end{cases}$$

Це – ***загальні рівняння*** L, від яких легко перейти до канонічних або параметричних рівнянь. Дійсно, якщо

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то розв’язуючи останню систему відносно змінних x та y при довільному значенні $z = z_0$, одержуємо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що лежить на L. Напрямний вектор прямої L обчислюємо за формулою

$$\bar{a} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2,\ \overline{N}_1 = (A_1, B_1 C_1),\ \overline{N}_2 = (A_2, B_2 C_2).$$

<u>Приклад.</u> Обчислити кут α між прямою L_1, що має канонічні рівняння

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-2} = z-2,$$

та прямою L_2, яка визначається загальними рівняннями

$$\begin{cases} x - 2y + z - 11 = 0 \quad (\Pi_1), \\ 2x + y - 3z + 5 = 0 \ (\Pi_2). \end{cases}$$

Позначимо через $\bar{a}_1 = (2, -2, 1)$ напрямний вектор прямої L_1 та знайдемо напрямний вектор $\bar{a}_2$ прямої L_2, враховуючи, що $\overline{N}_1 = (1, -2, 1)$, $\overline{N}_2 = (2, 1, -3)$

$$\bar{a}_2 = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (5, 5, 5) = 5 \cdot (1,1,1).$$

Так як кут α між прямими L_1, L_2 рівний куту між їх напрямними векторами $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, то

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2}{|\bar{a}_1||\bar{a}_2|} = \frac{5 \cdot (2, -2, 1) \cdot (1,1,1)}{\sqrt{4+4+1} \cdot 5\sqrt{1+1+1}} = \frac{5}{15 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}},\ \alpha = \arccos\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

5. Рівняння прямої у просторі, що проходить через дві задані точки

В цьому випадку дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$ можна вважати початком та кінцем напрямного вектора $\bar{a}$ прямої L, яка проходить через точку M_1, тобто

$$\bar{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Враховуючи це, записуємо такі канонічні рівняння L, що проходить через дві задані точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

<u>Приклад.</u> Знайти координати точки перетину площини, що взначається рівнянням $2x + y + 2z = 6$, з прямою, яка проходить через точки $M_1(1, 2, -2)$ та $M_2(-1, 6, -5)$.

Складаємо канонічні рівняння прямої, що проходить через дані точки

$$\frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-2}{6-2} = \frac{z+2}{-5+2}, \quad \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+2}{-3},$$

після чого записуємо відповідні параметричні рівняння

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + 4t, \quad t \in R. \\ z = -2 - 3t, \end{cases}$$

Так як точка перетину належить одночасно даним площині і прямій, то її координати будуть розв'язками наступної системи, що складається з параметричних рівнянь прямої та рівняння площини

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + 4t, \\ z = -2 - 3t, \\ 2x + y + 2z = 6. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, одержуємо шукані координати

$$2(1-2t) + 2 + 4t + 2(-2-3t) = 6, \; -6t = 6, \; t = -1, \; x = 3, \; y = -2, \; z = 1.$$

Відповідь. $x = 3, \; y = -2, \; z = 1.$

6. Рівняння прямої на площині

Наступні рівняння прямої L на площині XOY одержуємо:

- як лінію перетину площини, паралельної осі OZ, з площиною $z = 0$,
- як частинний випадок прямої в просторі.

1) ***Рівняння прямої, що проходить через дану точку*** $M_0(x_0, y_0)$ ***перпендикулярно до даного вектора нормалі*** $\overline{N} = (A; B)$. Ця пряма L має рівняння $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ та зображена на Рис. 4.

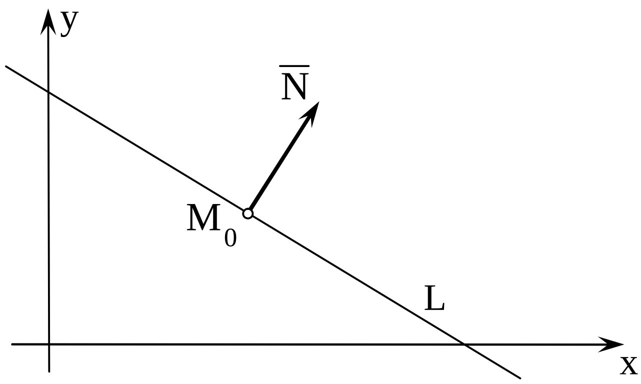

Рис. 4

2) ***Загальне рівняння прямої*** з вектором нормалі $\overline{N}$

$$Ax + By + C = 0.$$

3) ***Рівняння прямої у відрізках***

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

4) ***Нормоване рівняння прямої***

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0,$$

ліва частина якого використовується при розв'язуванні деяких задач.

5) ***Параметричні рівняння прямої*** з напрямним вектором $\overline{a} = (l, m)$, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \quad t \in R.$$

6) ***Канонічні рівняння прямої***

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}.$$

7) ***Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки*** $M_0(x_0,y_0)$ та $M_1(x_1,y_1)$

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

Нехай $x_1-x_0\neq 0$, тоді останнє рівняння можна записати у вигляді

$$y=y_0+k(x-x_0),\ k=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}.$$

Число k називається кутовим коефіцієнтом даної прямої, причому $k=\mathrm{tg}\alpha$, де α – кут нахилу цієї прямої до осі Ох. Одержане рівняння $y=y_0+k(x-x_0)$ називається ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*** k***, що проходить через точку*** $M_0(x_0,y_0)$**.** Розкриємо дужки в правій частині цього рівняння

$$y=kx+b,\ b=y_0-kx_0.$$

Рівняння $y=kx+b$ називається ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом***. Відповідна пряма зображена на Рис. 5

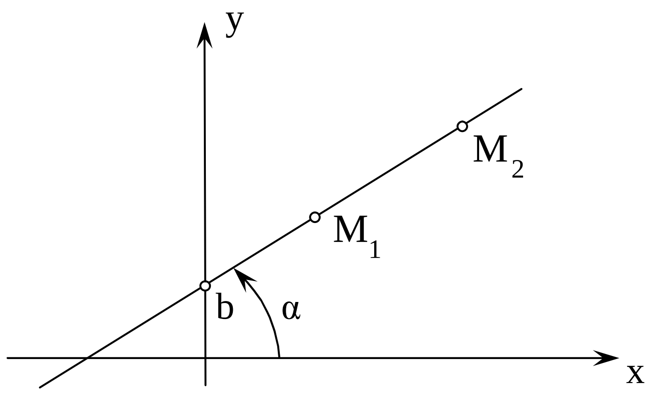

Рис. 5

Відзначимо, що кут φ між двома прямими, що мають рівняння

$$y = k_1 x + b_1, \; y = k_2 x + b_2,$$

обчислюється за формулою $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$, при цьому умови перпендикулярності та паралельності даних прямих мають відповідно вигляд $k_1 k_2 = -1, \; k_1 = k_2$.

<u>Приклад 1.</u> Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1,4)$ та відтинає на координатних осях ненульові відрізки рівної довжини.

Будемо шукати це рівняння як рівняння прямої у відрізках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$ Згідно з умовою задачі $|a| = |b|, \; \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1, \; a \neq 0,$ тому a і b визначаються наступними співвідношеннями

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = a, \\ 4a + b = ab, \end{cases} \\ \begin{cases} b = -a, \\ 4a + b = ab, \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = a, \\ 5a = a^2, \end{cases} \\ \begin{cases} b = -a, \\ 3a = -a^2, \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 5, \\ b = 5, \end{cases} \\ \begin{cases} a = -3, \\ b = 3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь. $x + y = 5$ або $y - x = 3$.

<u>Приклад 2.</u> Знайти точку M_2, симетричну точці $M_1(4,2)$ відносно прямої $2x + 3y = 1$.

Позначимо дану пряму символом L_1, обчислимо її кутовий кщефіцієнт $k_1 = -\frac{2}{3}$ та проведемо через точку M_1 пряму L_2, перпендикулярну до прямої L_1. Символом M_0 позначимо точку перетину прямих L_1 та L_2. Очевидно точка M_2 лежатиме на L_2, при цьому M_0 буде серединою відрізка $M_1 M_2$ (Рис. 6). Рівняння прямої L_2 будемо шукати у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом $y = k_2 x + b_2$, де k_2

знаходиться з умови перпендикулярності L_1 та L_2

$$k_1 k_2 = -1,\ -\frac{2}{3}k_2 = -1,\ k_2 = \frac{3}{2}.$$

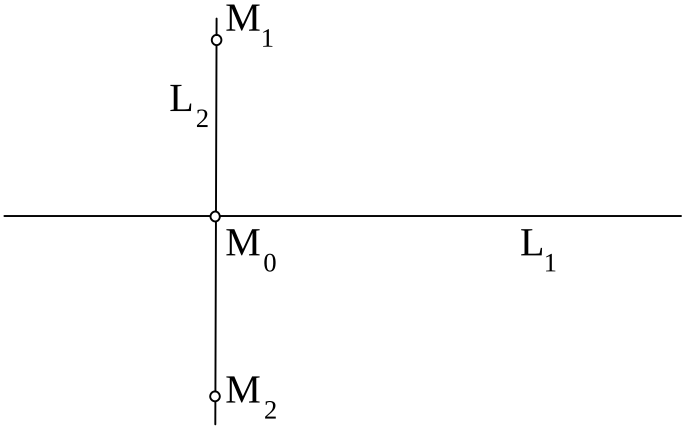

Рис. 6

Так як координати точки M_1 задовольняють рівняння L_2, то $2 = \frac{3}{2} \cdot 4 + b_2$ і отже $b_2 = -4$. Знайшовши k_2 та b_2, записуємо рівняння $y = \frac{3}{2}x - 4$ прямої L_2. Точка M_0 лежить на L_1 і на L_2, тому її координати задовольняють рівняння обох цих прямих одночасно. Маємо

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ y = \frac{3}{2}x - 4, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + \frac{9}{2}x - 12 = 1, \\ y = \frac{3}{2}x - 4, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{13}{2}x = 13, \\ y = \frac{3}{2}x - 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$

Одержана точка $M_0(2,-1)$ є серединою відрізка M_1M_2, тобто ділить його у відношенні $\lambda = 1$. Звідси випливає, що якщо x, y – шуканої точки M_2, то

$$\frac{4+x}{2} = 2,\ \frac{2+y}{2} = -1,\ x = 0,\ y = -4.$$

Відповідь. $M_2(0,-4)$.

7. Обчислення віддалі від точки до площини та прямої

Розглянемо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та площину $Ax + By + Cz + D = 0$, що має вектор нормалі $\overline{N} = (A, B, C)$ і проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Поставимо задачу знайти віддаль d від M_0 до даної площини (Рис. 7).

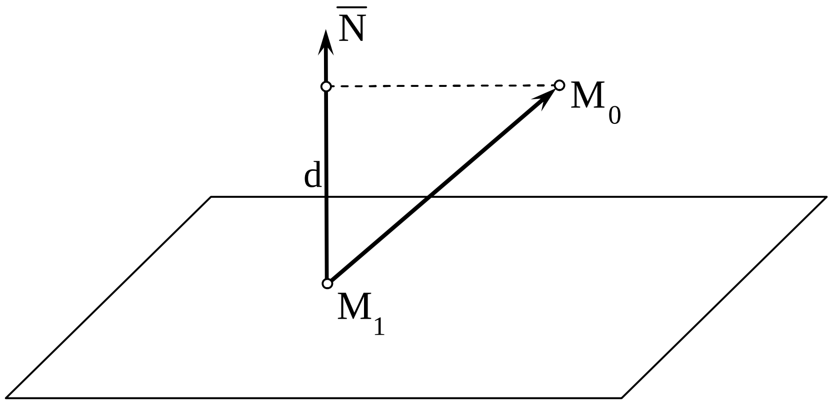

Рис. 7

Враховуючи, що

$\overline{M_1M_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$, $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$, одержуємо

$$d = \left|\text{Пр}_{\overline{N}}\overline{M_1M_0}\right| = \frac{\left|\overline{N}\cdot\overline{M_1M_0}\right|}{\left|\overline{N}\right|} = \frac{\left|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Як бачимо, для обчислення віддалі від точки до площини досить обчислити модуль лівої частини нормованого рівняння цієї площини в даній точці.

Аналогічно обчислюється віддаль d від прямої на площині, що має рівняння $Ax + By + C = 0$, до точки $M_0(x_0, y_0)$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Розглянемо ще задачу обчислення віддалі d від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямої L в просторі з напрямним вектором $\overline{a} = (l, m, n)$, яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та має канонічні рівняння

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}.$$

В цьому випадку віддаль d буде висотою паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$, $\overline{M_1M_0}$ як на сторонах (Рис. 8).

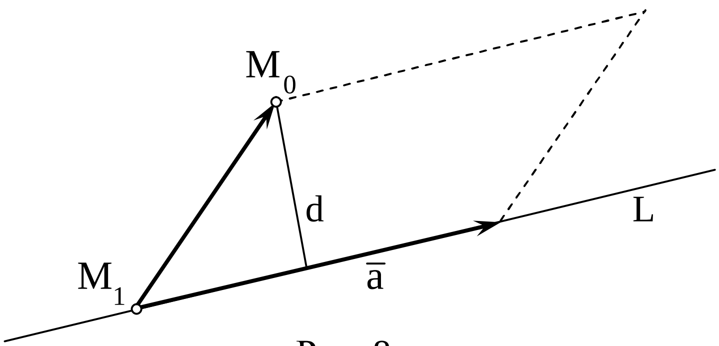

Рис. 8

Враховуючи геометричний зміст модуля векторного добутку двох векторів, маємо наступну формулу для обчислення d

$$d = \frac{|\overline{a} \times \overline{M_1M_0}|}{|\overline{a}|}.$$

<u>Приклад 1.</u> Обчислити віддаль між двома паралельними площинами

$$2x - y - 2z = -1, \;\; 4x - 2y - 4z = 25.$$

Беремо довільну точку M_0, що лежить на першій площині, тобто щоб її координати задовольняли перше рівняння. Нехай це буде точка $M_0(0, 1, 0)$, тоді згідно з відомою формулою

$$d=\frac{|4\cdot 0-2\cdot 1-4\cdot 0-25|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)^2}}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}.$$

<u>Приклад 2.</u> Обчислити віддаль від точки $M_0(-2,1,0)$ до прямої

$$\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+2}{6}.$$

Тут точка $M_1(-1,2,-2)$ лежить на даній прямій, $\bar{a}=(-2,3,6)$, тому

$$\overline{M_1M_0}=(-1,-1,2),\ \ \bar{a}\times\overline{M_1M_0}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -2 & 3 & 6\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}=(12,-2,5),$$

$$d=\frac{\sqrt{12^2+(-2)^2+5^2}}{\sqrt{(-2)^2+3^2+6^2}}=\frac{\sqrt{144+4+25}}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{\sqrt{173}}{7}.$$

РОЗДІЛ ІІІ. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

І. Обчислити визначник

1. $\begin{vmatrix}3 & 3 & 2 & 0\\ -4 & 1 & -4 & 7\\ 5 & 0 & 5 & 2\\ 0 & -5 & 2 & 3\end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix}2 & 8 & -5 & 1\\ 1 & 9 & 0 & -6\\ 0 & -5 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -7 & 6\end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix}8 & 1 & -5 & 1\\ 0 & -3 & 0 & -6\\ -5 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 9 & -6\\ 0 & 2 & -5 & 2\\ 1 & 4 & 0 & 6\end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix}3 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 4\\ 0 & 4 & -2 & 3\\ 5 & 2 & 0 & 1\end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & 8\\ 1 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 2 & -1 & -5\\ 1 & 4 & -7 & 0\end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -7 & 2 & -8 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -4 & -2 \\ -1 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & -4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 7 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

II. Знайти матрицю, обернену до даної

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

21. $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}$

22. $A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}$

23. $A=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$

24. $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

25. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}$

26. $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$

27. $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -2\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$

28. $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$

29. $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

30. $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$

III. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - y + 4z = 15 \\ 3x - y + z = 8 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \\ 5x - 6y + 4z = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y - 3z = 3 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x + y - 4z = -2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ 5x-14y+15z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 5x+y+3z=14 \\ 2x+y+2z=5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ 3x-2y+2z=0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+2y+z=6 \\ 2x-y=-1 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x+2y-5z=0 \\ 3x+y-2z=0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x+3y+5z=2 \\ 4x+2y+7z=-5 \\ 5x+y+4z=-6 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x-2y-5z=8 \\ 4x-5y-2z=13 \\ x+3y+7z=15 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x-3y+4z=-6 \\ 5x+y+7z=5 \\ 4x+2y+3z=9 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x+2y+z=19 \\ x+2y+4z=31 \\ 4x+6y+9z=-2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+4y+6z=4 \\ 3x+y-z=1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x+2y+4z=5 \\ 2x+5y+3z=4 \\ 7x-10y+8z=15 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x+3y+4z=1 \\ 4x+2y+z=3 \\ 2x-8y-17z=4 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 5x+7y+4z=2 \\ 3x+10y+9z=3 \\ 9x+y-6z=0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x-5y+z=1, \\ x+y-z=2, \\ x-13y+5z=-4. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x-2y+5z=6, \\ 9x-6y+9z=12, \\ 3x-2y-z=2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x-3y+2z=-1, \\ x+9y+6z=3, \\ x+3y+4z=1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x-y+2z=1, \\ 2x+y-z=3, \\ 4x-y+3z=5. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x+2y+z=5, \\ x+y-z=0, \\ 4x-y+5z=3. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x+y+4z=16, \\ 3x+2y+z=10, \\ x+3y+3z=16. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+y+2z=0, \\ x+y-z=3. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x+y-z=1, \\ 2x+y-2z=1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x-y+z=3, \\ x-y+2z=5, \\ 3x-6y+5z=6. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x+2y+3z=14, \\ x+y+z=6, \\ 2x+3y-z=5. \end{cases}$

IV. Знайти кут при вершині C трикутника ABC, якщо дано координати його вершин

1. A(0;0;-1), B(1;2;3), C(3;-2;2)
2. A(1;0;0), B(0;2;1), C(1;1;1)
3. A(0;1;-1), B(2;3;1), C(1;1;1)
4. A(1;1;0), B(0;0;-1), C(2;1;-1)
5. A(4;1;0), B(2;2;1), C(6;3;1)
6. A(-1;-2;0), B(0;1;0), C(5;3;2)
7. A(-1;1;1), B(0;1;0), C(2;1;3)
8. A(1;0;2), B(-2;1;1), C(4;3;-1)
9. A(-2;1;2), B(3;-3;4), C(1;0;9)
10. A(2;0;3), B(0;-3;2), C(1;1;1).
11. A(-1;2;4),B(3;2;-2), C(3;-2;1)
12. A(1;-1;2), B(2;3;4), C(5;2;6).
13. A(1;-2;2), B(1;4;0), C(-4;1;1)
14. A(2;2;2), B(4;3;3), C(4;5;4)
15. A(1;2;3), B(7;3;2), C(-3;0;6)
16. A(5;7;-2), B(3;1;-1), C(9;4;-4)
17. A(0;0;2), B(1;0;3), C(3;-2;0)
18. A(1;0;1), B(2;2;1), C(1;3;1)
19. A(0;1;2), B(2;3;0), C(1;0;1)
20. A(1;2;0), B(0;1;-1), C(2;0;-1)
21. A(2;1;0), B(2;0;1), C(3;3;1)
22. A(-1;0;0), B(0;1;3), C(1;3;2)
23. A(-1;1;2), B(0;1;1), C(2;1;-1)
24. A(1;0;-2), B(-2;1;-1), C(4;3;-1)
25. A(-1;1;2), B(0;-3;4), C(1;0;3)
26. A(2;0;1), B(0;-1;2), C(1;2;1).
27. A(-1;2;3),B(3;2;2), C(1;-2;1)
28. A(1;-1;0), B(2;3;1), C(5;2;1).
29. A(1;-2;0), B(1;4;1), C(-4;1;3)
30. A(2;0;2), B(4;1;3), C(4;2;4)

V. Обчислити площу трикутника ABC, якщо дано координати його вершин

1. A(1;0;1), B(2;1;0), C(3;2;1)
2. A(1;1;0), B(1;2;0), C(0;1;2)
3. A(1;2;0), B(2;1;0), C(2;1;1)
4. A(2;3;0), B(1;2;0), C(1;1;1)
5. A(1;0;1), B(0;1;1), C(1;1;0)
6. A(2;1;1), B(1;0;2), C(2;2;1)
7. A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1)
8. A(1;1;1), B(2;2;2), C(3;0;3)
9. A(1;0;1), B(2;1;0), C(1;2;0)
10. A(1;1;1), B(2;1;1), C(1;3;1)
11. A(2;1;1), B(3;0;1), C(2;-1;3)
12. A(1;1;-2), B(2;0;-1), C(1;1;0)
13. A(2;1;2), B(3;0;3), C(1;1;2)
14. A(0;1;-2), B(1;3;-1), C(3;3;0)
15. A(0;0;1), B(2;2;1), C(0;2;3)
16. A(1;0;-2), B(2;1;-1), C(1;2;-1)
17. A(2;2;2), B(1;3;3), C(1;3;2)
18. A(1;2;-1), B(0;1;3), C(1;2;1)
19. A(2;1;-3), B(2;1;-2), C(3;2;1)
20. A(1;2;1), B(2;3;2), C(1;0;1)
21. A(1;2;-2), B(-1;1;-2), C(1;1;-1)
22. A(1;2;-2), B(2;1;-3), C(3;0;-2)
23. A(1;2;1), B(3;-1;1), C(2;1;1)
24. A(2;-1;2), B(2;1;-1), C(2;2;-1)
25. A(3;2;0), B(4;1;2), C(3;0;2)
26. A(1;3;2), B(1;2;3), C(3;2;1)
27. A(2;-3;1), B(1;-3;1), C(2;-1;3)
28. A(1;2;-2), B(2;2;-3), C(2;0;-4)
29. A(1;-1;2), B(2;0;4), C(3;1;4)
30. A(2;1;-1), B(3;1;0), C(0;1;3)

VI. Обчислити об’єм трикутної піраміди ABCD, якщо дано координати її вершин

1. A(0;2;-1), B(1;2;3), C(3;-1;2), D(0;2;1)
2. A(1;1;0), B(0;2;1), C(1;0;1), D(0;1;1)
3. A(0;1;3), B(2;3;0), C(1;0;1), D(0;0;1)
4. A(1;1;1), B(0;0;-1), C(2;3;-1), D(1;3;1)
5. A(4;1;1), B(2;1;1), C(5;3;1), D(0;0;2)
6. A(-1;-1;0), B(0;1;2), C(3;3;2), D(3;2;2)
7. A(-1;1;2), B(0;-1;0), C(2;-1;3), D(0;1;1)

8. A(1;1;2), B(-2;1;0), C(4;0;-1), D(1;2;1)
9. A(-1;1;2), B(3;-3;4), C(1;0;6), D(0;0;3)
10. A(-2;0;3), B(0;-3;2), C(-1;1;1), D(1;2;1)
11. A(-1;1;4),B(3;3;-2), C(1;-2;1), D(2;2;1)
12. A(2;-1;2), B(3;3;4), C(4;2;6), D(3;2;1)
13. A(1;-2;0), B(1;4;0), C(-2;1;1), D(0;2;0)
14. A(2;0;2), B(4;1;3), C(4;3;2), D(0;1;0)
15. A(1;2;2), B(2;1;2), C(-3;0;6), D(0;2;0)
16. A(5;0;-2), B(3;1;-1), C(9;4;-4), D(0;2;-1)
17. A(0;1;-1), B(1;1;3), C(2;-1;2), D(3;2;1)
18. A(1;-1;0), B(0;2;2), C(1;0;2), D(0;1;2)
19. A(0;3;3), B(2;3;0), C(1;1;1), D(0;2;1)
20. A(1;0;1), B(0;0;-1), C(2;1;-1), D(1;3;1)
21. A(4;1;1), B(3;1;1), C(5;3;1), D(4;0;2)
22. A(-1;1;0), B(0;1;2), C(3;2;2), D(3;0;2)
23. A(-1;1;2), B(0;0;0), C(2;-1;3), D(0;3;1)
24. A(1;1;0), B(-2;1;0), C(0;0;-1), D(1;2;1)
25. A(0;1;2), B(3;3;4), C(1;0;6), D(0;0;3)
26. A(-2;-1;3), B(0;-3;2), C(-1;1;1), D(1;2;3)
27. A(-1;1;-2),B(3;3;-2), C(1;-2;1), D(2;2;-1)
28. A(1;-1;2), B(3;3;3), C(4;2;5), D(3;2;2)
29. A(1;-2;2), B(1;4;1), C(-2;1;1), D(0;2;4)
30. A(2;0;0), B(4;1;2), C(4;3;2), D(0;1;1)

VII. Знайти рівняння площини, що проходить через точки A та B паралельно вектору $\bar{a}$

1. A(2;1;0), B(3;2;1), $\bar{a}$(1;2;3)
2. A(1;2;0), B(0;1;2), $\bar{a}$(0;0;1)
3. A(2;1;0), B(2;1;1), $\bar{a}$(1;1;1)
4. A(1;2;0), B(1;1;1), $\bar{a}$(0;5;0)

5. $A(0;1;1)$, $B(1;1;0)$, $\bar{a}(2;1;2)$
6. $A(1;0;2)$, $B(2;2;1)$, $\bar{a}(3;2;1)$
7. $A(0;1;0)$, $B(0;0;1)$, $\bar{a}(1;1;0)$
8. $A(2;2;2)$, $B(3;0;3)$, $\bar{a}(1;1;0)$
9. $A(2;1;0)$, $B(1;2;0)$, $\bar{a}(1;3;1)$
10. $A(2;1;1)$, $B(1;3;1)$, $\bar{a}(1;1;4)$
11. $A(3;0;1)$, $B(2;-1;3)$, $\bar{a}(0;2;0)$
12. $A(2;0;-1)$, $B(1;1;0)$, $\bar{a}(2;3;0)$
13. $A(3;0;3)$, $B(1;1;2)$, $\bar{a}(1;2;3)$
14. $A(1;3;-1)$, $B(3;3;0)$, $\bar{a}(1;2;-2)$
15. $A(2;2;1)$, $B(0;2;3)$, $\bar{a}(1;1;2)$
16. $A(2;1;-1)$, $B(1;2;-1)$, $\bar{a}(1;-1;-3)$
17. $A(1;3;3)$, $B(1;3;2)$, $\bar{a}(0;2;3)$
18. $A(0;1;3)$, $B(1;2;1)$, $\bar{a}(2;-1;-1)$
19. $A(2;1;-2)$, $B(3;2;1)$, $\bar{a}(2;2;-3)$
20. $A(2;3;2)$, $B(1;0;1)$, $\bar{a}(0;3;2)$
21. $A(-1;1;-2)$, $B(1;1;-1)$, $\bar{a}(2;3;0)$
22. $A(2;1;-3)$, $B(3;0;-2)$, $\bar{a}(3;2;1)$
23. $A(3;-1;1)$, $B(2;1;1)$, $\bar{a}(2;1;3)$
24. $A(2;1;-1)$, $B(2;2;-1)$, $\bar{a}(0;1;2)$
25. $A(4;1;2)$, $B(3;0;2)$, $\bar{a}(4;3;2)$
26. $A(1;2;3)$, $B(3;2;1)$, $\bar{a}(2;1;4)$
27. $A(1;-3;1)$, $B(2;-1;3)$, $\bar{a}(2;-1;4)$
28. $A(2;2;-3)$, $B(2;0;-4)$, $\bar{a}(1;3;-2)$
29. $A(2;0;4)$, $B(3;1;4)$, $\bar{a}(1;2;4)$
30. $A(3;1;0)$, $B(0;1;3)$, $\bar{a}(2;-1;1)$

VIII. Обчислити кут між двома прямими

1. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-6}{0}$ та $\begin{cases} x=-t+7 \\ y=3t-10 \\ z=2t-1 \end{cases}.$

2. $\frac{x-11}{1}=\frac{y+12}{-1}=\frac{z+6}{2}$ та $\begin{cases} x=-t+4 \\ y=-2t-1 \\ z=t-13 \end{cases}.$

3. $\frac{x-8}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$ та $\begin{cases} x=-3t+5 \\ y=t-2 \\ z=t-4 \end{cases}.$

4. $\frac{x}{4}=\frac{y+9}{-1}=\frac{z-2}{5}$ та $\begin{cases} x=2t \\ y=4t-1. \\ z=t-15 \end{cases}$

5. $\frac{x+8}{4}=\frac{y+7}{-1}=\frac{z-3}{3}$ та $\begin{cases} x=-3t+3 \\ y=-t-1 \;. \\ z=4t-21 \end{cases}$

6. $\frac{x-11}{1}=\frac{y+7}{3}=\frac{z}{5}$ та $\begin{cases} x=t+5 \\ y=-t-8 \;. \\ z=-2t-5 \end{cases}$

7. $\frac{x-4}{5}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z-2}{1}$ та $\begin{cases} x=-2t+7 \\ y=2t-10\,. \\ z=2 \end{cases}$

8. $\frac{x+6}{0}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ та $\begin{cases} x=-4t+1 \\ y=t-1 \quad . \\ z=2t-12 \end{cases}$

9. $\frac{x-7}{3}=\frac{y+8}{2}=\frac{z-1}{3}$ та $\begin{cases} x=-5t+2 \\ y=2t-5 \;. \\ z=3t-11 \end{cases}$

10. $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{1}$ та $\begin{cases} x=-t+6 \\ y=4t-12\,. \\ z=3t-7 \end{cases}$

11. $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-4}{2}$ та $\begin{cases} x=-2t+3 \\ y=t-4 \quad . \\ z=2t-1 \end{cases}$

12. $\frac{x-11}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-6}{1}$ та $\begin{cases} x=-4t+7 \\ y=-5t-1\,. \\ z=-2t+3 \end{cases}$

13. $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z-6}{3}$ та $\begin{cases} x=-3t+7 \\ y=t-3 \\ z=t-1 \end{cases}$.

14. $\frac{x+7}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{1}$ та $\begin{cases} x=-2t+4 \\ y=t-4 \\ z=-t-1 \end{cases}$.

15. $\frac{x-5}{3}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-6}{-1}$ та $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=3t-1 \\ z=t-2 \end{cases}$.

16. $\frac{x-5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-8}{-1}$ та $\begin{cases} x=-3t+6 \\ y=t-1 \\ z=t-4 \end{cases}$.

17. $\frac{x+2}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{4}$ та $\begin{cases} x=-4t+1 \\ y=2t-3 \\ z=t-1 \end{cases}$.

18. $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-1}{2}$ та $\begin{cases} x=t+9 \\ y=t-1 \\ z=2t-1 \end{cases}$.

19. $\frac{x+5}{1}=\frac{y+8}{-1}=\frac{z-4}{-4}$ та $\begin{cases} x=-2t+1 \\ y=t-3 \\ z=-2t-1 \end{cases}$.

20. $\frac{x+5}{-2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-3}{2}$ та $\begin{cases} x=3t+1 \\ y=3t \\ z=2t-4 \end{cases}$.

21. $\frac{x+6}{0}=\frac{y+7}{-1}=\frac{z}{1}$ та $\begin{cases} x=-4t \\ y=3 \\ z=2t+1 \end{cases}$.

22. $\frac{x+6}{0}=\frac{y+7}{-1}=\frac{z}{1}$ та $\begin{cases} x=-3t+7 \\ y=3t-1 \\ z=t-1 \end{cases}$.

23. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-1}{-1}$ та $\begin{cases} x=-2t+7 \\ y=2t-10 \\ z=t-11 \end{cases}$.

24. $\frac{x-11}{-2}=\frac{y+7}{-1}=\frac{z-2}{4}$ та $\begin{cases} x=3t+1 \\ y=5t-5 \\ z=6t-1 \end{cases}$.

25. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-8}{-1}$ та $\begin{cases} x=-2t+5 \\ y=t-7 \\ z=-t-1 \end{cases}$.

26. $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z-3}{3}$ та $\begin{cases} x=-2t+7 \\ y=2t-5 \\ z=-t-1 \end{cases}$.

27. $\frac{x-5}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-1}{2}$ та $\begin{cases} x=t+2 \\ y=-t-3 \\ z=-2t+4 \end{cases}$.

28. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-1}{-1}$ та $\begin{cases} x=-2t+1 \\ y=t-1 \\ z=2t-5 \end{cases}$.

29. $\frac{x+4}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{1}$ та $\begin{cases} x=-t+3 \\ y=t-2 \\ z=3t-1 \end{cases}$.

30. $\frac{x-5}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-4}{-1}$ та $\begin{cases} x=-3t+1 \\ y=-t-12 \\ z=-t-8 \end{cases}$.

IX. Знайти точку перетину площини та прямої

1. $2x-3y+z-5=0$, $\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$.

2. $x+2y-z+3=0$, $\quad \frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{-1}$.

3. $3x-y-z+1=0$, $\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-1}{-1}$.

4. $2x+y+3z-4=0$, $\quad \frac{x-2}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{2}$.

5. $x-y+z+2=0$, $\quad x+1=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-2}{1}$.

6. $x-2y-3z+2=0$, $\quad \frac{x}{-2}=\frac{y+3}{-1}=z-2$.

7. $3x-y+z+1=0$, $\quad \frac{x-2}{3}=-y-2=\frac{z+2}{-1}$.

8. $x-y-z+1=0$, $\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{-1}$.

9. $2x-2y+3z-1=0$, $\quad \frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{2}$.

10. $3x-y-2z+1=0$, $\quad \frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{-1}=z$.

11. $x-y+3z+1=0$, $\quad \frac{x+1}{-3}=\frac{y}{2}=z-1$.

12. $x+2y+z+2=0$, $\quad \frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{2}$.

13. $x+y+z=0$, $\quad \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-6}{0}$.

14. $x-y+2z+2=0$, $\quad \frac{x+6}{0}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$.

15. $x+2y-3z=0$, $\quad \frac{x}{4}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{2}$.

16. $3x+2y-z-2=0,\qquad x-1=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{2}.$

17. $2x+y+z-1=0,\qquad x-3=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}.$

18. $2x-2y-3z-5=0,\qquad \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{-1}=z-2.$

19. $x+y-z+4=0,\qquad \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{2}.$

20. $x+y+2z+1=0,\qquad \dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+2}{-1}=z-1.$

21. $x+2y+2z-2=0,\qquad \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}.$

22. $x-y+2z+3=0,\qquad \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{3}.$

23. $2x-2y-3z-5=0,\qquad \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}.$

24. $2x-y-3z-1=0,\qquad \dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{0}.$

25. $x+2y-z-1=0,\qquad \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}.$

26. $x+y-3z-3=0,\qquad x+1=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{1}.$

27. $x+y+3z+1=0,\qquad \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{2}.$

28. $3x+2y-2z=0,\qquad \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{-1}=z-2.$

29. $x-2y-z+3=0,\qquad \dfrac{x}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{-1}.$

30. $2x+y+2z-2=0,\qquad \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}.$

X. Знайти віддаль між двома паралельними площинами

1. $x + y - 3z - 3 = 0$ та $x + y - 3z - 3 = 0$.
2. $x + 2y - z - 1 = 0$ та $x + 2y - z - 1 = 0$.
3. $x - y + 2z + 3 = 0$ та $x - y + 2z + 3 = 0$.
4. $3x + 2y - 2z = 0$ та $3x + 2y - 2z = 0$.
5. $2x - 2y - 3z - 5 = 0$ та $2x - 2y - 3z - 5 = 0$.
6. $x + 2y + 2z - 2 = 0$ та $x + 2y + 2z - 2 = 0$.
7. $2x + y + 2z - 2 = 0$ та $2x + y + 2z - 2 = 0$.
8. $2x - y - 3z - 1 = 0$ та $2x - y - 3z - 1 = 0$.
9. $x + y + 3z + 1 = 0$ та $x + y + 3z + 1 = 0$.
10. $x - 2y - z + 3 = 0$ та $x - 2y - z + 3 = 0$.
11. $x - y + z + 2 = 0$ та $x - y + z + 2 = 0$.
12. $x - 2y - 3z + 2 = 0$ та $x - 2y - 3z + 2 = 0$.
13. $x + 2y - z + 3 = 0$ та $x + 2y - z + 3 = 0$.
14. $x - y - z + 1 = 0$ та $x - y - z + 1 = 0$.
15. $3x - y - z + 1 = 0$ та $3x - y - z + 1 = 0$.
16. $3x - y - 2z + 1 = 0$ та $3x - y - 2z + 1 = 0$.
17. $2x - 3y + z - 5 = 0$ та $2x - 3y + z - 5 = 0$.
18. $3x - y + z + 1 = 0$ та $3x - y + z + 1 = 0$.
19. $2x + y + 3z - 4 = 0$ та $2x + y + 3z - 4 = 0$.
20. $2x - 2y + 3z - 1 = 0$ та $2x - 2y + 3z - 1 = 0$.
21. $3x + 2y - z - 2 = 0$ та $3x + 2y - z - 2 = 0$.
22. $x - y + 2z + 2 = 0$ та $x - y + 2z + 2 = 0$.
23. $2x - 2y - 3z - 5 = 0$ та $2x - 2y - 3z - 5 = 0$.
24. $x + 2y - 3z = 0$ та $x + 2y - 3z = 0$.

25. $x - y + 3z + 1 = 0$ та $x - y + 3z + 1 = 0$.

26. $x + y + 2z + 1 = 0$ та $x + y + 2z + 1 = 0$.

27. $x + 2y + z + 2 = 0$ та $x + 2y + z + 2 = 0$.

28. $x + y + z = 0$ та $x + y + z = 0$.

29. $2x + y + z - 1 = 0$ та $2x + y + z - 1 = 0$.

30. $x + y - z + 4 = 0$ та $x + y - z + 4 = 0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., Наука, 1974.
2. Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Линейная алгебра в примерах и задачах. М., Высшая школа, 2005.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., Наука, 1980.
4. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М., Наука, 1971.
5. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах, ч.1. М., Высшая школа, 1967.
6. Добротин Д.А. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. Ленинград, изд. ЛГУ, 1977.
7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М., Наука, 1999.
8. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М., Наука, 1972.
9. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., Наука, 1971.
10. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М., Наука, 1970.
11. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия. М., Наука, 1978.
12. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М., Наука, 1972.

ЗМІСТ