МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

ВИЩА МАТЕМАТИКА

# Розділ: **ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ**

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів
напряму підготовки 6.050504 „Зварювання”

РЕКОМЕНДОВАНО ВЧЕНОЮ РАДОЮ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОГО
ФАКУЛЬТЕТУ НТУУ „КПІ”

Київ

2012

**ВИЩА МАТЕМАТИКА**

Розділ: ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ:

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів

напряму підготовки 6.050504 „Зварювання”

Укладачі: Довгай В.В., Мельник А.Ф., 2012 – 63с.

Рекомендовано Вченою Радою фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»

(Протокол № 2 від 27 березня 2012р.)

**ВИЩА МАТЕМАТИКА**

Розділ: ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ:

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів

напряму підготовки 6.050504 „Зварювання”

Укладачі: Довгай В.В., Мельник А.Ф.

Рецензент:Чертов І.М., к.т.н., доц. кафедри ЗВ НТУУ „КПІ”.

Відповідальний редактор:Швець О.Ю., д.ф.-м.н., проф. кафедри математичної фізики НТУУ «КПІ».,

# ВСТУП

В другому семестрі програмою з вищої математики на зварювальному факультеті НТУУ „КПІ” передбачено розділ „Ряди ”. При вивченні даного розділу студенти знайомляться з поняттями числового та функціонального ряду, ряду Фур’є, оволодівають методами дослідження числового ряду на збіжність, знаходження області збіжності функціонального ряду, вчаться розкладати функції в степеневий ряд та в ряд Фур’є та застосовувати ряди для розв'язання практичних задач.

Методичні вказівки написані відповідно до програми і включають основні теоретичні відомості та приклади розв'язання типових задач, а також завдання для самостійної роботи студентів і список літератури, рекомендованої для детальнішого ознайомлення з темою.

Мета пропонованих методичних вказівок – допомогти студентам зварювального факультету глибше засвоїти вказаний матеріал, розвинути навички застосування теоретичних знань до розв'язання конкретних задач та активізувати самостійну роботу студентів.

Методичні вказівки призначені для використання на практичних заняттях з вищої математики та для самостійної роботи студентів.

# РОЗДІЛ І. ЧИСЛОВІ РЯДИ

## §1. ЧИСЛОВИЙ РЯД ТА ЙОГО ЗБІЖНІСТЬ. ВЛАСТИВОСТІ ЗБІЖНИХ РЯДІВ

*Означення 1.* Нехай задана нескінченна послідовність дійсних чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ Числовим рядом називається вираз вигляду

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ..., \tag{1}$$

або $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Числа $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ називаються членами ряду, а число $a_n$ – $n$-м (або загальним ) членом ряду.

Введемо для числового ряду поняття суми. Для цього розглянемо суму перших $n$ членів ряду: $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $n = 1, 2, 3, ...$ , яку назвемо $n$-ю частинною сумою ряду (1). Довільний ряд породжує послідовність частинних сум:

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

*Означення 2.* Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S,$$

то ряд (1) називається збіжним, а число $S$ називається сумою ряду, тобто

$S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Якщо $\lim_{n\to\infty}S_n$ не існує (наприклад, $S_n\to\infty$ при $n\to\infty$), то ряд (1) називається розбіжним і суми не має.

Приклад 1. Виходячи з означення, дослідити на збіжність ряд і у випадку збіжності ряду знайти його суму:

а) $1+1+1+\ldots+1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}1;$

б) $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1};$

в) $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\left(n+1\right)}$.

Розв'язання.

а) Для даного ряду $a_n=1,\quad n=1,2,3,\ldots,\quad S_n=n,$ тому $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$ і ряд розбіжний.

б) Послідовність частинних сум заданого ряду має вигляд $1,0,1,0,1,0,\ldots$ і не прямує до жодного числа. Тому $\lim_{n\to\infty}S_n$ не існує і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}-$ розбіжний.

в) Загальний член ряду представимо у вигляді суми простих дробів: $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}.$ Тоді $n-$та частинна сума ряду $S_n=\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\ldots$

$$+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$=1-\dfrac{1}{n+1}.$ Існує $\lim_{n\to\infty}S_n=1.$ Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ збіжний і його сума $S=1.$

Приклад 2. Написати ряд та знайти його суму, якщо $S_n = \frac{1}{n}$.

Розв'язання. Так як $S_n = S_{n-1} + a_n$, то $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} =$

$= -\frac{1}{n(n-1)}$, $\quad n = 2,3,...$ При $n = 1$ $\quad a_1 = S_1 = 1$. Таким чином, $S_n = \frac{1}{n}$ є частинною сумою ряду $\quad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - ... - \frac{1}{n(n-1)} - ...$ Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$, то ряд збіжний і $S = 0$.

*Означення 3.* Якщо в ряді (1) відкинути перші $n$ членів, то одержимо ряд $\quad a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+k} + ... = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ , який називається залишком ряду (1) після $n$-го члена.

Якщо ряд (1) збіжний і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\quad \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k = R_n$, то $\quad R_n = S - S_n$.

Наведемо ***найпростіші властивості збіжних числових рядів***.

1) Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, його сума дорівнює $S$ і $l -$ довільне дійсне число, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l\, a_n$ теж збіжний і його сума дорівнює $l\,S$.

2) Якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжні та мають суми $S_1$ і $S_2$, відповідно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n + b_n\right)$ теж збіжний і його сума дорівнює $S_1 + S_2$.

3) Ряд (1) збіжний тоді і тільки тоді, коли збіжний довільний його залишок (тобто на збіжність ряду не впливає відкидання або приєднання скінченного числа членів).

4) Для збіжності ряду (1) необхідно і досить, щоб $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k =$

$=\lim\limits_{n\to\infty}R_n = 0.$

5) ***Необхідна умова збіжності ряду***: якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збіжний, то

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0.$

Це легко довести. Дійсно, якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збіжний, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_n = S.$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$. Властивість 5 дає необхідну, але не достатню умову збіжності ряду. А саме, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ може бути як збіжним, так і розбіжним.

6) ***Наслідок*** з властивості 5: якщо $\lim\limits_{n\to\infty}a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ розбіжний.

Цією властивістю зручно користуватися для доведення розбіжності деяких рядів. Так, ряди а) і б) з прикладу1 є розбіжними, оскільки їх загальний член не прямує до нуля. Розбіжним є і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n+4}$, бо для нього $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+4} = \frac{2}{3} \neq 0$.

<u>Приклад 3.</u> Розглянемо ряд

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}, \qquad (2)$$

який називають ***геометричною прогресією*** з першим членом $a$ $(a \neq 0)$ і знаменником $q$. При $q \neq 1$ сума перших $n$ членів ряду (2) дорівнює

$$S_n = \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q}.$$

Якщо $|q|<1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$ і, значить, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q} = \frac{a}{1-q}$. Ряд (2) є збіжним і його сума $S = \frac{a}{1-q}$.

Якщо $|q|>1$, то $\left|aq^{n-1}\right| \to \infty$ при $n \to \infty$. Загальний член ряду не прямує до нуля, ряд розбіжний.

Якщо $|q|=1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left|aq^{n-1}\right| = |a| \neq 0$. Ряд розбіжний.

Отже, геометрична прогресія є збіжною тоді і тільки тоді, коли $|q|<1$. В наступному прикладі розглянемо інший важливий числовий ряд.

Приклад 4. Ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}, \qquad (3)$$

називається ***гармонічним***. Покажемо, що гармонічний ряд розбіжний (хоча $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, тобто необхідна умова збіжності ряду виконується). Припустимо, що ряд (3) збіжний і має суму $S$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_{2n}-S_n\right) = S-S=0$. Проте $S_{2n}-S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+$ $+\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}\cdot n = \frac{1}{2}$, що суперечить попередній рівності. Отже, гармонічний ряд розбіжний.

## §2. ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ З ДОДАТНИМИ ЧЛЕНАМИ

Будемо вивчати числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами $(a_n \geq 0$, $n = 1, 2, 3, ...)$. В цьому випадку $S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}$, тобто послідовність частинних сум ряду $S_n$ монотонно зростає. Можливі два випадки:

1)послідовність $S_n$ обмежена, тоді існує скінченна $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ і ряд збіжний;

2) $S_n$ - необмежена, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ і ряд розбіжний. Ця особливість полегшує дослідження рядів з додатними членами.

<u>Теорема 1.</u> ( ***ознака порівняння*** ). Нехай задані два ряди з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2}$$

і виконується нерівність

$$a_n \leq b_n, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{3}$$

Тоді із збіжності ряду (2) слідує збіжність ряду (1), а з розбіжності ряду (1) – розбіжність ряду (2).

Зауваження. Теорема 1 залишається справедливою і у випадку, якщо нерівність (3) виконується, починаючи з деякого номера $n > N$, а не для всіх $n = 1, 2, 3, ...$

<u>Теорема 2.</u> ( ***ознака порівняння в граничній формі*** ). Нехай задані ряди (1) і (2) з додатними членами, причому $b_n \neq 0$ при $n > N$. Якщо існує

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=K,\quad 0<K<+\infty,$$

то ряди (1) і (2) одночасно збіжні чи одночасно розбіжні.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}.$$

Розв'язання. Заданий ряд є рядом з додатними членами $a_n=\dfrac{1}{\ln n}>0$, $n=2,3,\ldots$ Покладемо $b_n=\dfrac{1}{n}$, тоді $a_n>b_n$ при $n=2,3,\ldots$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=$ $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ розбіжний, то за ознакою порівняння і ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$ розбіжний.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{p}{2^n}.$$

Розв'язання. Члени заданого ряду $a_n=\sin\dfrac{p}{2^n}>0,\quad n=1,2,\ldots$

Виберемо $b_n=\dfrac{1}{2^n}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ збіжний як геометрична прогресія, знаменник якої $q=\dfrac{1}{2}$ $\left(|q|<1\right)$. Так як $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{p}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=p\neq 0$, то за ознакою порівняння в граничній формі ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{p}{2^n}$ теж збіжний.

Теорема 3. (***ознака Даламбера***).

Нехай заданий ряд (1) з додатними членами і нехай існує

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q.$$

Тоді а) якщо $q<1$, то ряд (1) збіжний;

б) якщо $q>1$ - ряд (1) розбіжний;

в) при $q=1$ питання про збіжність чи розбіжність ряду залишається відкритим.

Зауваження. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, але $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ для всіх $n>N$, то ряд (1) розбіжний.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$$

Розв'язання. Для заданого ряду $a_n=\frac{2^n}{(n+1)!}$, $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+2)!2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+2}=0<1.$$ Ряд збіжний.

Теорема 4. (***ознака Коші***). Нехай задано ряд (1) з додатними членами та існує $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$. Тоді

а) при $q<1$ ряд (1) збіжний;

б) при $q>1$ ряд (1) розбіжний;

в) при $q=1$ питання про збіжність чи розбіжність ряду залишається відкритим.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}.$$

Розв'язання. В даному випадку $a_n=\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. Тому

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=\frac{e}{2}>1$ і ряд розбіжний.

Теорема 5. (***інтегральна ознака***). Нехай функція $f(x)-$неперервна, додатна, не зростаюча при $x\ge a,$ і така, що $f(n)=a_n,\quad n\ge N_0\ge a.$ Тоді ряд $\sum\limits_{n=a}^{\infty}a_n$ збіжний (чи розбіжний) одночасно з інтегралом $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx,$ і для суми ряду виконується нерівність

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx\le S\le\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx+f(a). \tag{4}$$

Приклад 5. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a},\quad a\in R, \tag{5}$$

який називається ***узагальненим гармонічним рядом,*** або ***рядом Діріхле***. Застосуємо до ряду (5) інтегральну ознаку, поклавши $f(x)=\frac{1}{x^a}$. Якщо $a\ne1,$ то

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}dx=\left.\frac{x^{-a+1}}{1-a}\right|_1^{+\infty}=\begin{cases}\dfrac{1}{a-1} & при\quad a>1;\\ \infty & при\quad a<1.\end{cases}$$

Якщо $a=1$, то $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^{+\infty}=\infty$. Отже, інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^a}$, а значить, і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$, збіжний при $a>1$ і розбіжний при $a\le 1$.

Нерівність (4) дозволяє оцінити залишок ряду з додатними членами. Дійсно, нехай $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k$ і виконані умови теореми 5. Тоді

$$\int\limits_{n+1}^{+\infty}f(x)dx\le R_n\le\int\limits_{n+1}^{+\infty}f(x)dx+a_{n+1}. \qquad (6)$$

Оцінка (6) може використовуватись для наближеного обчислення сум рядів з додатними членами.

Приклад 6. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ з точністю до $e=0,01$.

Розв'язання. Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=S_n+R_n$, де $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$. Якщо залишок ряду $R_n$ наближено замінити інтегралом $\int\limits_{n+1}^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_{n+1}^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx$, то, виходячи з нерівності (6), похибка $e=\left|R_n-\int\limits_{n+1}^{+\infty}f(x)dx\right|\le a_{n+1}$. Значить, потрібно знайти такий номер $n$, при якому $a_{n+1}<0,01$, тоді $e<0,01$. При $n=3$, $a_{n+1}=\frac{1}{4^3}>0,01$, а при $n=4$, $a_{n+1}=\frac{1}{5^3}<0,01$. Тому

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\approx S_4+\int\limits_5^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx=1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}-\frac{1}{2x^2}\Big|_5^{+\infty}\approx 1,178+0,02=1,198\approx 1,20.$$

## §3. ЗНАКОПОЧЕРГОВІ РЯДИ. ТЕОРЕМА ЛЕЙБНІЦА

*Означення*. Ряд вигляду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots, \tag{1}$$

де $u_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$ називається ***знакопочерговим*** рядом.

Теорема (***Лейбніца***). Якщо для знакопочергового ряду (1) виконуються умови:

1) $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > u_{n+1} > \ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$

то ряд (1) збіжний і його сума $S$ задовольняє нерівності: $0 < S < u_1.$

Теорема Лейбніца залишається справедливою, якщо числа $u_k$ монотонно спадають, починаючи з деякого номера $k.$ Умова 2) теореми є одночасно і необхідною для збіжності ряду (1).

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Розв'язання. Це знакопочерговий ряд. Перевіримо виконання умов теореми Лейбніца:

1) $u_n = \dfrac{1}{n}; \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow u_n > u_{n+1};$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

Умови виконуються, тому ряд (2) збіжний.

Теорему Лейбніца можна застосувати і до залишку ряду (1)

$$R_n = (-1)^{n+2}u_{n+1} + (-1)^{n+3}u_{n+2} + \ldots, \qquad (3)$$

який теж є знакопочерговим рядом.

<u>Наслідок</u> (***оцінка залишку знакопочергового ряду***). Нехай знакопочерговий ряд (1) задовольняє умовам теореми Лейбніца. Тоді залишок цього ряду $R_n$ по модулю не перевищує модуля першого члена залишку: $$|R_n| < u_{n+1}.$$

<u>Приклад 2.</u> Обчислити суму ряду $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k!}$ з точністю до $e = 0,01.$

Розв'язання. Заданий ряд збіжний, оскільки задовольняє умовам теореми Лейбніца. Дійсно, $u_n = \frac{1}{n!}$, $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow u_n > u_{n+1}$;

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!} = 0.$ Сума ряду $S = S_n + R_n$, де $|R_n| < u_{n+1}$. Так як $u_4 = \frac{1}{4!} > e$, а $u_5 = \frac{1}{5!} < e$, то $|R_4| < u_5 < e$ і можна покласти наближено

$$S \approx S_4 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = 0,625 \approx 0,63.$$

## §4. ЗНАКОЗМІННІ РЯДИ. АБСОЛЮТНА ТА УМОВНА ЗБІЖНІСТЬ

<u>*Означення 1.*</u> Ряд називається ***знакозмінним***, якщо серед його членів є нескінченна кількість як додатних, так і від'ємних.

Знакопочергові ряди є, очевидно, частинним випадком знакозмінних рядів.

Нехай задано знакозмінний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

Складемо ряд із модулів членів ряду (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{2}$$

<u>Теорема 1.</u> Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - збіжний, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Тобто, щоб дослідити на збіжність знакозмінний ряд, в деяких випадках достатньо розглянути відповідний додатний ряд, застосувавши ознаку збіжності для додатних рядів.

<u>*Означення 2.*</u> Якщо ряд (2) – збіжний, то ряд (1) називається ***абсолютно збіжним***. Якщо ряд (1) – збіжний, а ряд (2) – розбіжний, то ряд (1) називається ***умовно збіжним***.

Абсолютно збіжні ряди більшою мірою зберігають властивості скінченних сум. Суттєву різницю між абсолютною та умовною збіжностями ряду ілюструють наступні властивості.

<u>Теорема 2.</u> В абсолютно збіжному ряді можна довільно групувати члени, зберігаючи порядок їх слідування, при цьому сума ряду не змінюється.

<u>Теорема 3.</u> Якщо ряд абсолютно збіжний, то будь-який ряд, утворений за допомогою перестановки його членів, також абсолютно збіжний і має ту ж суму.

<u>Теорема 4.</u> Якщо ряд умовно збіжний, то яке б не було наперед задане число $A$, можна так переставити члени цього ряду, щоб його сума дорівнювала $A$. Крім того, можна так переставити члени умовно збіжного ряду, щоб ряд, отриманий після перестановки, був розбіжним.

Приклад 1. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}. \qquad (3)$$

Розв'язання. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$ і застосуємо до нього ознаку порівняння. Так як $\frac{|\sin n|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - збіжний (як ряд Діріхле з $a=2>1$), то за ознакою порівняння і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$ - збіжний. Отже, ряд (3) абсолютно збіжний.

Приклад 2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}. \qquad (4)$$

Розв'язання. Складемо ряд із модулів членів даного ряду $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$. Оскільки $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$ при $n=2,3,...$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - розбіжний, то за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ - розбіжний. Отже, ряд (4) не є абсолютно збіжним, але він збіжний, бо задовольняє умови теореми Лейбніца:

1) $u_n=\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{\ln(n+1)}=u_{n+1}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$.

Таким чином, ряд (4) умовно збіжний.

Приклад 3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}. \qquad (5)$$

Розв’язання. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}$. Застосуємо до нього ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}=0<1.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}$ - збіжний, тому ряд (5) – абсолютно збіжний.

# РОЗДІЛ II. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

## § 1. ОБЛАСТЬ ЗБІЖНОСТІ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РЯДУ. ВЛАСТИВОСТІ СУМИ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РЯДУ

*Означення 1.* Нехай задана послідовність функцій $u_1(x), u_2(x),..., u_n(x),...,$ визначених на деякій множині $X$. Вираз вигляду

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \tag{1}$$

називається ***функціональним рядом***.

Підставляючи в ряд (1) замість $x$ деяке число, отримуємо числовий ряд, який буде збіжним для одних значень $x$ і розбіжним для інших. Наприклад, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ є збіжним при $x=\frac{1}{2}$ і розбіжним при $x=1$.

*Означення 2.* Множина значень $x\in X$, для яких ряд (1) – збіжний, називається ***областю збіжності*** $E$ функціонального ряду (1).

Очевидно, що в області збіжності ряду його сума є деякою функцією від $x$. Тому суму функціонального ряду позначають $S(x)$. Якщо $x \in E$, то існує $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) = S(x)$.

Для знаходження області збіжності ряду (1) переважно розглядаємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$, до якого застосовуємо відомі ознаки збіжності рядів з додатними членами.

<u>Приклад 1.</u> Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n. \qquad (2)$$

Розв’язання. Ряд (2) є геометричною прогресією зі знаменником $q = x$. Тому для всіх $|q| = |x| < 1$ ряд (2) збіжний. Отже, $E = (-1;1)$.

<u>Приклад 2.</u> Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}. \qquad (3)$$

Розв’язання. Розглянемо ряд із модулів членів даного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{n}$ і застосуємо ознаку Коші: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = |x|$.

При $|x| < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{n}$ збіжний, а при $|x| > 1$ - розбіжний. Отже, ряд (3) в інтервалі $(-1;1)$ є абсолютно збіжним.

При $|x| > 1$ $n$-й член ряду (3) $\frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ не прямує до нуля при $n \to \infty$, тому ряд розбіжний.

Дослідимо поведінку ряду (3) в межових точках інтервалу $(-1;1)$.

При $x=1$ отримуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, який є умовно збіжним, а при $x=-1$ - ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^{n}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ , що є розбіжним. Остаточно, $E=(-1;1]$.

Приклад 3. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{3^n}. \tag{4}$$

Розв’язання. До ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sin\frac{x}{3^n}\right|$ застосуємо ознаку Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\sin\frac{x}{3^{n+1}}}{\sin\frac{x}{3^n}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x/3^{n+1}}{x/3^n}\right|=\frac{1}{3}<1,\ \ x\in(-\infty;+\infty),\quad x\neq 0.$ При $x=0$ збіжність ряду (4) очевидна. Отже, $E=(-\infty;+\infty)$.

Приклад 4. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{e^{nx}}. \tag{5}$$

Розв’язання. До ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin nx|}{e^{nx}}$ застосуємо ознаку порівняння:

$\frac{|\sin nx|}{e^{nx}}\le\frac{1}{e^{nx}},\quad n=1,2,...,\quad x\in(-\infty;+\infty).$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{nx}}-$ геометрична прогресія із знаменником $q=\frac{1}{e^x}$. Отже, ряд збіжний, якщо $\frac{1}{e^x}<1$, або $e^x>1$, тобто при $x\in(0;+\infty)$. Отже, ряд (5) збіжний при $x>0$. При $x=0$ заданий ряд теж збіжний. При $x<0$ $n-$й член ряду $\frac{\sin nx}{e^{nx}}$ не прямує до нуля при $n\to\infty$, тому ряд (5) розбіжний. Остаточно, $E=[0;+\infty)$.

*Означення 3.* Функціональний ряд (1) називається ***мажоровним*** в деякій області $E_1 \subset E,$ якщо існує додатний збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такий, що $|u_n(x)| \le a_n, \quad n = 1, 2, ...,$ для всіх $x \in E_1.$

Із означення випливає, що мажоровний ряд є абсолютно збіжним в області $E_1.$ Мажоровні ряди зберігають ряд властивостей скінченних сум неперервних функцій.

Теорема 1. (***про почленне інтегрування мажоровного ряду***). Нехай ряд (1) мажоровний на $[a;b]$ і члени ряду $u_n(x)$ неперервні на $[a;b].$ Тоді сума $S(x)$ ряду (1) неперервна на $[a;b]$ і

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx. \qquad (6)$$

Теорема 2. (***про почленне диференціювання мажоровного ряду***). Нехай ряд (1) є збіжним на $[a;b]$ і має суму $S(x);$ члени ряду $u_n(x)$ мають неперервні похідні $u_n'(x)$ на $[a;b]$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ мажоровний на $[a;b].$ Тоді $S(x)$ диференційовна на $[a;b]$ і справедлива рівність

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \qquad (7)$$

Приклад 5. Довести, що функція $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ є неперервною при $x > 0,$ та обчислити інтеграл $\int_{\ln 2}^{\ln 3} S(x)dx.$

Розв'язання. Задамо дійсне число $d > 0.$ Тоді

$|u_n(x)| = \frac{n}{e^{nx}} \le \frac{n}{e^{nd}}$ при $x \ge d.$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{nd}}$ збіжний. Дійсно, за ознакою Коші

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n}{e^{nd}}}=\dfrac{1}{e^d}<1$ при $d>0$. Таким чином, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ є мажоровним при $x\geq d>0$ (а, значить, і для всіх $x>0$ ) і сума ряду $S(x)$ є неперервною функцією при $x>0$. За формулою (6)

$$\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} ne^{-nx}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-nx})\Big|_{\ln 2}^{\ln 3}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-n\ln 2}-e^{-n\ln 3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{-n}-3^{-n}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}.$$

## §2. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ. ІНТЕРВАЛ ЗБІЖНОСТІ

*Означення 1.* ***Степеневим рядом*** називається функціональний ряд вигляду

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots, \tag{1}$$

де $x_0$ і $a_k$ $(k=0,1,2,\ldots)-$ сталі числа ( $a_k$ називають коефіцієнтами ряду). Зокрема, при $x_0=0$ ряд (1) набуває вигляду

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{2}$$

Теорема 1. (***Абеля***). Якщо ряд (2) збіжний для деякого значення $x_1\neq 0$, то він абсолютно збіжний для довільного $x$ такого, що $|x|<|x_1|$. Якщо ряд (2) розбіжний для деякого значення $x_2$, то він є розбіжним для довільного $x$ такого, що $|x|>|x_2|$.

З теореми Абеля випливають наступні твердження.

Наслідок 1. Для степеневого ряду (2) існує число $R, \quad 0 \le R \le \infty,$ таке, що при $|x| < R$ ряд (2) є абсолютно збіжним, а при $|x| > R -$ розбіжним.

Наслідок 2. Для степеневого ряду (1) існує таке число $R, \quad 0 \le R \le \infty,$ що ряд (1) є абсолютно збіжним в інтервалі $|x - x_0| < R$ і розбіжним при $|x - x_0| > R.$

Інтервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ називають ***інтервалом збіжності*** ряду (1), а число $R -$ ***радіусом збіжності*** (рис.1).

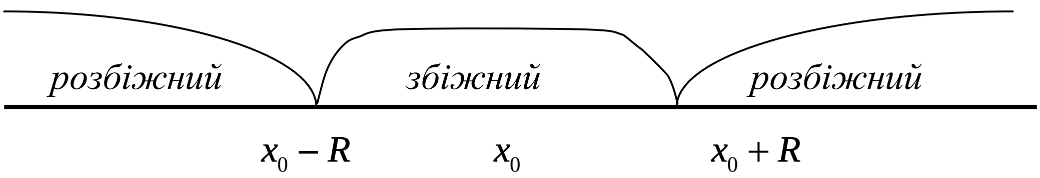


Рис.1

На кінцях інтервалу збіжності (тобто в точках $x = x_0 - R; \quad x = x_0 + R$) питання про збіжність ряду вирішується індивідуально для конкретного ряду.

Відмітимо, що при $R = 0$ інтервал збіжності вироджується в точку $x = x_0$, а при $R = \infty$ співпадає з усією віссю.

Радіус збіжності степеневого ряду знаходять за допомогою ознак Даламбера чи Коші, застосовуючи їх до ряду, складеного з модулів членів степеневого ряду.

Приклад 1. Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n (2n+1)}. \tag{3}$$

Розв’язання. До ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-1|^n}{3^n(2n+1)}$ застосуємо ознаку Коші:

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x-1|^n}{3^n(2n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|}{3\sqrt[n]{2n+1}}=\frac{|x-1|}{3}$. Якщо $\frac{|x-1|}{3}<1$, або

$|x-1|<3,\quad -3<x-1<3,\quad -2<x<4,$ то ряд (3) абсолютно збіжний, а при $x\notin[-2;4]$ – розбіжний. Тобто, $(-2;4)$ – інтервал збіжності ряду (3) і $R=3$.

Дослідимо поведінку ряду в крайніх точках інтервалу. Нехай $x=-2$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ збіжний за теоремою Лейбніца. Дійсно,

1) $u_n=\frac{1}{2n+1}>\frac{1}{2n+3}=u_{n+1},\quad n=1,2,...$ і 2) $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0.$

Нехай $x=4$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ дослідимо за ознакою порівняння в граничній формі. Так як $\lim_{n\to\infty}\frac{1/(2n+1)}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбіжний, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ розбіжний. Отже, $E=[-2;4)$.

<u>Приклад 2.</u> Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}. \qquad (4)$$

Розв’язання. Розглянемо ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}$. За ознакою Даламбера

$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}n!}{(n+1)!\,|x|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0<1$. Значить, $R=\infty$ і $E=(-\infty;+\infty)$.

Приклад 3. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n(x+3)^n}. \qquad (5)$$

Розв’язання. Покладемо в ряді (5) $t=\dfrac{1}{x+3}, \quad x\neq -3,$ і отримаємо степеневий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n}t^n. \qquad (6)$$

Застосуємо ознаку Коші: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^2|t|^n}{4^n}}=\dfrac{|t|}{4}.$ Отже, інтервал збіжності ряду (6) визначається умовою $\dfrac{|t|}{4}<1,$ або $t\in(-4;4).$ Повертаючись до змінної $x,$ маємо $-4<\dfrac{1}{x+3}<4 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x+3>\dfrac{1}{4}; \\ x+3<-\dfrac{1}{4}; \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x>-2\dfrac{3}{4}; \\ x<-3\dfrac{1}{4}; \end{array}\right.$

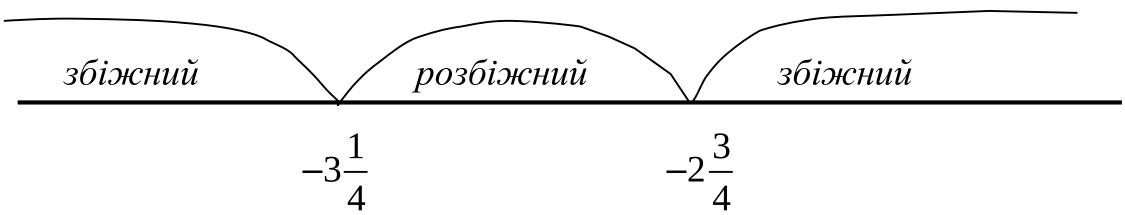


Рис.2

При $x=-3\dfrac{1}{4}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{4^n\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2$ розбіжний, бо $n-$й член ряду не прямує до нуля при $n\to\infty.$ При $x=-2\dfrac{3}{4}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2$ теж розбіжний. Отже, $E=(-\infty;-3,25)\cup(-2,75;+\infty).$

## §3. ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Розглянемо степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

з інтервалом збіжності $(-R;R), \quad R>0,$ та вкажемо його важливі властивості.

Теорема 1 (***про мажоровність степеневого ряду***). Ряд (1) є мажоровним на довільному відрізку $[-r;r], \quad 0<r<R.$

Теорема 2 (***про почленне диференціювання степеневого ряду***). Якщо ряд (1) має інтервал збіжності $(-R;R),$ то і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad (2)$$

одержаний в результаті почленного диференціювання ряду (1), має той самий інтервал збіжності $(-R;R),$ при цьому

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R;R). \qquad (3)$$

Теорема 3 (***про почленне інтегрування степеневого ряду***). Степеневий ряд (1) можна почленно інтегрувати на кожному відрізку, що належить його інтервалу збіжності.

Зокрема, якщо $|x|<R,$ то справедлива формула

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad (4)$$

причому радіуси збіжності рядів (1) і (4) співпадають.

Теореми 1 – 3 залишаються справедливими і для степеневих рядів вигляду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ з інтервалом збіжності $(x_0 - R; x_0 + R), \quad R>0.$

<u>Приклад 1.</u> Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$

Розв'язання. Раніше показано (приклад 2 §1), що $E=(-1;1]$. Позначимо $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad |x|<1.$ За теоремою 2 $S'(x)=$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{1}{1+x}$$ при $|x|<1$ (як сума збіжної геометричної прогресії). Тоді $S(x)=\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x), \quad |x|<1.$ Отже,

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$ при $|x|<1.$

<u>Приклад 2.</u> Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$

Розв'язання. Розглянемо степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n,$ який співпадає з заданим рядом при $x=\frac{1}{2}.$ Так як $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|x|^n} = |x|,$ то, за ознакою Коші, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ має інтервал збіжності $(-1;1).$ Позначимо суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = xS(x), \quad |x|<1.$$ За теоремою 3

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \quad |x|<1.$$

Тоді $S(x)=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1-x+x}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{(1-x)^2}, \quad |x|<1.$ Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = xS(x)=$

$=\dfrac{x}{(1-x)^2}$ при $|x|<1$. Покладемо в останній рівності $x=\dfrac{1}{2}$ і одержимо

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}=2.$

## §4. РЯД ТЕЙЛОРА. РОЗКЛАД ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ В СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

*Означення 1.* Якщо

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \tag{1}$$

при $x\in(x_0-R;x_0+R)$, то кажуть, що функція $f(x)$ ***розкладена в степеневий ряд*** в околі точки $x_0$.

Наприклад, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}, \quad |x|<1$. Значить, функція $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ розкладається в степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ в околі точки $x_0=0$.

З теореми 2 §3 випливає, що розкласти в степеневий ряд можна тільки ту функцію, яка має похідні всіх порядків в інтервалі $(x_0-R;x_0+R)$.

Теорема 1. Нехай функція $f(x)$ розкладена в степеневий ряд (1) в інтервалі $(x_0-R;x_0+R)$. Тоді коефіцієнти ряду визначаються за формулою

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n=0,1,2,... \tag{2}$$

Нехай $f(x)$ задана і має похідні всіх порядків в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$. Якщо розклад $f(x)$ в степеневий ряд існує, то він має вигляд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \qquad (3)$$

Якщо ряд (3) є збіжним і має суму $f(x)$, то розклад функції $f(x)$ в степеневий ряд отримано. Якщо ряд (3) не є збіжним до $f(x)$, то функція $f(x)$ не може бути розкладена в степеневий ряд в околі точки $x_0$.

<u>*Означення 2.*</u> Ряд (3) називають ***рядом Тейлора*** для функції $f(x)$ в околі точки $x_0$. При $x_0 = 0$ ряд

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

називають ***рядом Маклорена.***

Розглянемо частинну суму ряду (3) $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ і позначимо $f(x) - S_n(x) = R_n(x)$. Тоді $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$ є формула Тейлора для функції $f(x)$, а $R_n(x)$ – залишковий член формули Тейлора.

<u>Теорема 2</u> (***необхідна і достатня умова розкладу функції в ряд Тейлора***). Ряд (3) є збіжним і має суму $f(x)$ тоді і тільки тоді, коли $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$

Умову $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ на практиці важко перевірити. Тому наведемо зручніше для застосування твердження.

<u>Теорема 3</u> (***достатня умова розкладу функції в ряд Тейлора***). Нехай функція $f(x)$ на проміжку $[x_0 - h; x_0 + h], \quad h > 0,$ має похідні всіх порядків і існує число $C > 0$ таке, що

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \le C, \quad n = 0,1,2,..., \tag{4}$$

при $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$. Тоді на проміжку $[x_0 - h; x_0 + h]$ ряд Тейлора (3) є збіжним і має суму $f(x)$.

Наведемо розклад в ряд Маклорена деяких елементарних функцій:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ..., \quad x \in R; \tag{5}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ..., \quad x \in R; \tag{6}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ..., \quad x \in R; \tag{7}$$

$$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ..., \quad x \in R; \tag{8}$$

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ..., \quad x \in R; \tag{9}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + ..., \quad |x| < 1; \tag{10}$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + ..., \quad |x| < 1; \tag{11}$$

$$(1+x)^a = 1 + a\,x + \frac{a\,(a-1)}{2!} x^2 + \frac{a\,(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + ... +$$

$$+ \frac{a\,(a-1) \cdot ... \cdot (a-n+1)}{n!} x^n + ..., \quad |x| < 1, \quad a \in R. \tag{12}$$

Ряд (12) називають біноміальним рядом.

Приклад 1. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = \cos^2 x$.

Розв’язання. Відомо, що $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$ З ряду (7) легко дістати ряд для функції $\cos 2x,$ замінивши $x$ на $2x.$ Тоді

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+1-\frac{4x^2}{2!}+\frac{16x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=$$

$$=1-x^2+\frac{x^4}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\quad x\in R.$$

<u>Приклад 2.</u> Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\arcsin x.$

Розв’язання. Похідну заданої функції $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ розкладемо в степеневий ряд. За формулою (12)

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}\cdot\frac{x^4}{2!}+\frac{15}{8}\cdot\frac{x^6}{3!}+\ldots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}+\ldots,\quad |x|<1.$$

Інтегруючи ряд почленно, одержимо

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\ldots+\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}+\ldots,\quad |x|<1.$$

## §5. ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ ДО НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

### *1. Наближене обчислення значень функцій.*

Якщо потрібно обчислити значення $f(a),$ функцію $f(x)$ розкладаємо в степеневий ряд. При $x=a$ $f(a)$ буде сумою числового ряду. Тобто, задача полягає в знаходженні суми числового ряду з заданою точністю $e$.

При обчисленні $f(a)$ похибка виникає з двох причин: 1) відкидання залишку ряду; 2) округлення в проміжних обчисленнях. Для врахування похибки округлень в проміжних обчисленнях зберігають 1 – 2 додаткові цифри.

Приклад 1. Обчислити число $e$ з точністю до 0,001.

Розв’язання. Якщо в ряд (5) §4 підставити $x=1,$ то одержимо числовий ряд

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+...+\frac{1}{n!}+..., \tag{1}$$

суму якого $e$ треба знайти з точністю до $e=0,001.$ Оцінимо залишок $R_n$ ряду (1).

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+...=\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+...\right)<$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+...\right)=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{n+2}}=\frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}.$$

Умова $\dfrac{n+2}{(n+1)!(n+1)}<0,001$ виконується, починаючи з $n=6$ (тобто, $R_6<0,001).$ Тому $e\approx S_6.$

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}\approx 2+0,5+0,1667+0,0417+0,0083+$$

$$+0,0014=2,7181\approx 2,718.$$

Приклад 2. Обчислити $\sin 1^\circ$ з точністю до 0,0001.

Розв’язання. Підставимо в ряд (6) §4 значення $x=1^\circ=\dfrac{p}{180}$ і одержимо числовий ряд

$$\sin\frac{p}{180}=\frac{p}{180}-\frac{p^3}{180^3 3!}+\frac{p^5}{180^5 5!}-\dots \qquad (2)$$

Так як ряд (2) знакопочерговий і $\dfrac{p^3}{180^3 3!}<0{,}0001,$ то

$\sin\dfrac{p}{180}\approx\dfrac{p}{180}\approx 0{,}0175.$

***2. Наближене обчислення визначених інтегралів.***

Для обчислення $\int\limits_a^b f(x)dx$ з точністю $e$ слід: розкласти $f(x)$ в степеневий ряд; проінтегрувати ряд почленно; підставити межі інтегрування; знайти суму числового ряду з заданою точністю $e$.

<u>Приклад 3.</u> Обчислити наближено $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{x}dx$ з точністю $e=0{,}001.$

Розв’язання. Використовуючи ряд (6) §4, запишемо

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\dots$$

Проінтегруємо ряд почленно

$$\int\limits_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\left(x-\frac{x^3}{3!3}+\frac{x^5}{5!5}-\frac{x^7}{7!7}+\dots\right)\Bigg|_0^1=1-\frac{1}{3!3}+\frac{1}{5!5}-\frac{1}{7!7}+\dots=$$

$$=1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}-\frac{1}{35280}+\dots$$

Так як $u_3=\dfrac{1}{600}>e$, а $u_4=\dfrac{1}{35280}<e$, то для наближеного обчислення досить взяти перші три члени ряду.

$$\int\limits_0^1\frac{\sin x}{x}dx\approx 1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}\approx 1-0{,}0556+0{,}0017=0{,}9461\approx 0{,}946.$$

***3. Наближене розв'язання диференціальних рівнянь.***

Одним з методів наближеного інтегрування диференціального рівняння є представлення розв'язку рівняння у вигляді ряду Тейлора

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots, \quad (3)$$

де коефіцієнти ряду визначаються послідовним диференціюванням диференціального рівняння та використанням початкових умов.

Приклад 4. Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння

$$y'=2\sin x-xy^2, \quad (4)$$

що задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

Розв'язання. Розклад шуканого розв'язку в ряд Тейлора в околі точки $x_0=0$ повинен мати вигляд

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \quad (5)$$

Послідовно диференціюючи рівняння (4) та підставляючи початкові умови, одержимо

$y(0)=1,\quad y'(0)=0,\quad y''=2\cos x-y^2-2xyy',\quad y''(0)=1;$

$y'''=-2\sin x-2yy'-2yy'-2x(y')^2-2xyy''=$

$=-2\sin x-4yy'-2x(y')^2-2xyy'',\quad y'''(0)=0;$

$y^{IV}=-2\cos x-4(y')^2-4yy''-2(y')^2-4xy'y''-2yy''-2xy'y''-2xyy'''=$

$=-2\cos x-6(y')^2-6yy''-6xy'y''-2xyy''',\quad y^{IV}(0)=-8.$

Підставимо знайдені значення в ряд (5):

$$y(x)=1+\frac{1}{2!}x^2-\frac{8}{4!}x^4+\ldots=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{3}+\ldots$$

Для випадку лінійного диференціального рівняння зручнішим є так званий метод невизначених коефіцієнтів, який розглянемо на наступному прикладі.

<u>Приклад 5.</u> Знайти перші п'ять відмінних від нуля членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння

$$xy'' + y = 0, \tag{6}$$

що задовольняє початковим умовам $y(0)=0, \quad y'(0)=1.$

Розв'язання. Припустимо, що функція $y(x)$ є розв'язком рівняння (6) і розкладається в степеневий ряд

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{7}$$

Диференціюючи (7) та використовуючи початкові умови, знаходимо:

$$y(0) = a_0 = 0, \qquad y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \ldots,$$

$$y'(0) = a_1 = 1, \qquad y''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \ldots$$

Підставимо $y$ і $y''$ в рівняння (6):

$$x(2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \ldots) + a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots = 0.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $x$, одержимо:

$$2a_2 + a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{a_1}{2} = -\frac{1}{2}; \qquad 6a_3 + a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{a_2}{6} = \frac{1}{12};$$

$$12a_4 + a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{a_3}{12} = -\frac{1}{144}; \qquad 20a_5 + a_4 = 0, \quad a_5 = -\frac{a_4}{20} = \frac{1}{2880}.$$

Таким чином,

$$y(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 + \frac{1}{2880}x^5 + \ldots$$

## §6. РЯДИ ФУР'Є

В техніці досить часто зустрічаються процеси, що повторюються через певні проміжки часу ( періодичні процеси ). Для їх опису використовуються періодичні функції, найпростіша з яких - синусоїда. В механіці синусоїда описує гармонічний коливальний рух. При додаванні кількох синусоїд різної частоти одержуємо складнішу періодичну функцію. Для досить широкого класу періодичних функцій справедливе і обернене твердження: періодичну функцію при деяких умовах можна представити у вигляді суми скінченного чи нескінченного числа синусоїдальних ( гармонічних ) складових.

### *1. Ряд Фур'є для функцій з періодом* $2p$ *.*

<u>*Означення 1*</u>. ***Тригонометричним рядом*** називається ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+...+a_n\cos nx+b_n\sin nx+...=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx\ , \qquad (1)$$

де числа $a_0,\ \ a_n,\ \ b_n,\ \ n=1,2,...,$ - коефіцієнти тригонометричного ряду.

Так як члени тригонометричного ряду мають спільний період $T=2p$ , то і сума ряду у випадку його збіжності є періодичною функцією з періодом $2p$ .

<u>Теорема 1.</u> Якщо ряд (1) є мажоровним на відрізку $\left[-p\,;p\right]$ і $f\left(x\right)-$ сума ряду (1), то для коефіцієнтів ряду справедливі формули

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f\left(x\right)dx,\quad a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f\left(x\right)\cos nxdx,\ b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f\left(x\right)\sin nxdx,\ n=1,2,...(2)$$

Коефіцієнти ряду, визначені за формулами (2), називаються ***коефіцієнтами Фур'є*** функції $f(x)$, а ряд (1) з такими коефіцієнтами називається ***рядом Фур'є*** функції $f(x)$.

Вкажемо, якою повинна бути функція $f(x)$, щоб ряд Фур'є, побудований для цієї функції, був збіжним і мав суму $f(x)$.

<u>*Означення 2.*</u> Функція $f(x)$ називається ***кусково-монотонною*** на $[a;b]$, якщо цей відрізок можна розбити скінченним числом точок на інтервали, в кожному з яких $f(x)$ є монотонною ( не зростаючою чи не спадною).

Якщо $f(x)$ кусково-монотонна і обмежена на $[a;b]$, то $f(x)$ може мати точки розриву тільки 1-го роду. Нехай $x_0 \in [a;b] -$ точка розриву функції $f(x)$. Покладемо $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ і $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Наступна теорема містить достатні умови розкладу функції в ряд Фур'є.

<u>Теорема 2</u> ( ***Діріхле*** ). Якщо функція $f(x)-$ періодична з періодом $2p$, кусково-монотонна і обмежена на відрізку $[-p;p]$, то ряд Фур'є цієї функції є збіжним. Сума цього ряду дорівнює $f(x)$ в усіх точках неперервності функції, і дорівнює $\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, якщо $x_0 -$ точка розриву функції $f(x)$.

<u>Приклад 1.</u> Функцію $f(x)=x$ розкласти в ряд Фур'є на проміжку $(-p;p)$.

Розв'язання. Функція $f(x)=x$ не є періодичною. Розглянемо нову функцію $j(x)$, яка є періодичною з періодом $2p$ $(j(x+2p)=j(x))$ і $j(x)=x$ при $x\in(-p;p)$. Функція $j(x)$ (рис.3) задовольняє умовам теореми Діріхле, тому може бути розкладена в ряд Фур'є, що має суму $j(x)$ в усіх точках неперервності функції, а, значить, має суму $x$ в точках інтервалу $(-p;p)$.

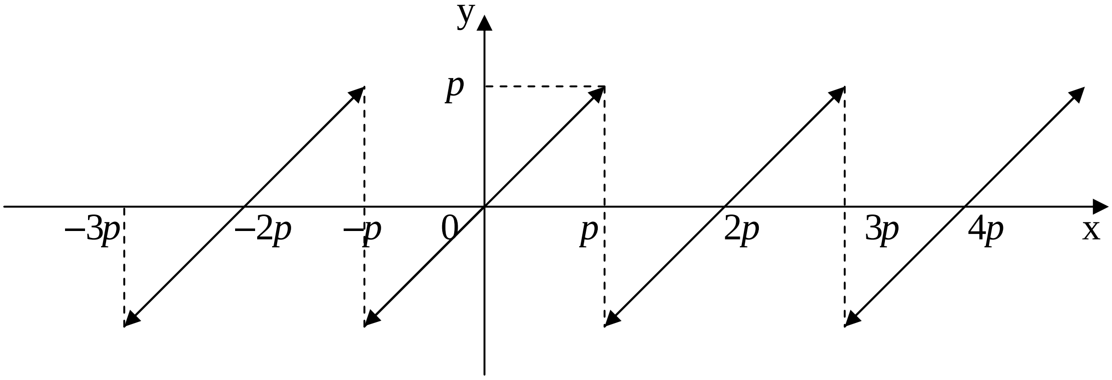


Рис.3

Обчислюємо коефіцієнти Фур’є за формулами (2).

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} x\,dx = 0, \quad a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} x\cos nx\,dx = 0,$$

як інтеграли в симетричних межах від непарної функції.

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} x\sin nx\,dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} x\sin nx\,dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = \sin nx\,dx \\ du = dx & v = -\dfrac{\cos nx}{n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{p}\left( -x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^p + \int_0^p \frac{\cos nx}{n}dx \right) = \frac{2}{p}\left( -p\,\frac{\cos p\,n}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^p \right) =$$

$$= -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Отже, $\quad x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \quad$ при $x \in (-p;p)$.

В точках розриву функції ряд Фур’є має суму 0.

## 2. *Ряд Фур'є для функції з періодом* $2l$.

Часто доводиться розкладати в тригонометричний ряд функції, період яких відмінний від $2p$. Нехай $f(x)$ є періодична функція з періодом $T=2l, \quad l>0,$ для якої виконуються на проміжку $(-l;l)$ умови теореми Діріхле. Тоді формули (1) і (2) допускають узагальнення на випадок $T=2l,$ а саме, в точках неперервності функції $f(x)$ справедливий розклад

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{p\,nx}{l}+b_n\sin\frac{p\,nx}{l}, \qquad (3)$$

де

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx, \quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{p\,nx}{l}dx, b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{p\,nx}{l}dx, \quad n=1,2,... (4)$$

Якщо $x_0-$ точка розриву функції $f(x),$ то в цій точці ряд Фур'є (3) має суму $\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}.$

<u>Приклад 2.</u> Функцію $f(x)=|x|$ розкласти в ряд Фур'є на відрізку $[-1;1].$

Розв'язання. Розглянемо періодичну функцію з періодом $T=2l=2,$ яка на проміжку $[-1;1]$ дорівнює $|x|$ (рис.4), і розкладемо її в ряд Фур'є.

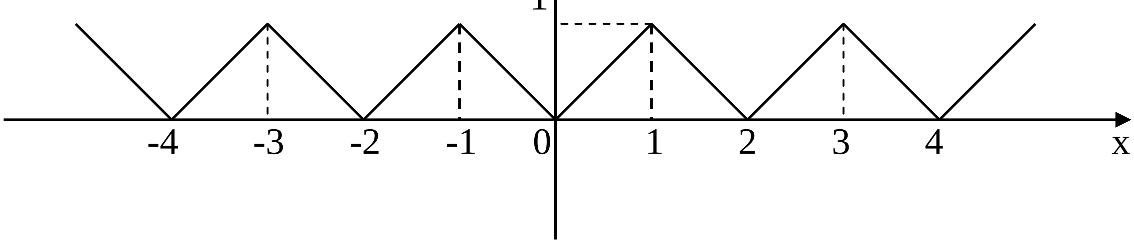


Рис. 4

Обчислимо коефіцієнти за формулами (4).

$$a_0 = \int_{-1}^{1} |x| dx = 2\int_0^1 x dx = x^2 \Big|_0^1 = 1,$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} |x| \cos \pi n x dx = 2\int_0^1 x \cos \pi n x dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = \cos \pi n x dx \\ du = dx & v = \dfrac{\sin \pi n x}{\pi n} \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left( x \frac{\sin \pi n x}{\pi n} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin \pi n x}{\pi n} dx \right) = \frac{2}{\pi^2 n^2} \cos \pi n x \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi^2 n^2}((-1)^n - 1) =$$

$$= \begin{cases} 0 & при \quad n = 2k, \\ -\dfrac{4}{\pi^2 n^2} & при \quad n = 2k-1, \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} |x| \sin \pi n x dx = 0.$$

Отже, розклад функції $f(x) = |x|$ в ряд Фур'є має вигляд

$$|x| = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2} \cos \pi n x = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \pi (2k-1) x}{(2k-1)^2}, \qquad x \in [-1;1].$$

### 3. *Ряд Фур'є для функції, що задана на* $(a;b)$.

Нехай функція $f(x)$ обмежена і кусково-монотонна в інтервалі $(a;b)$. Розглянемо довільну періодичну функцію $\varphi(x)$ з періодом $T = 2l = |b-a|$ таку, що $\varphi(x) = f(x)$ при $x \in (a;b)$. Розкладемо $\varphi(x)$ в ряд Фур'є. Сума цього ряду співпадатиме з $f(x)$ в усіх її точках неперервності, що належать $(a;b)$. Таким чином, ряд Фур'є для функції $f(x)$ в інтервалі $(a;b)$ має вигляд (3), а, враховуючи властивість періодичної функції: $\int\limits_{a}^{a+T} j(x)dx = \int\limits_{b}^{b+T} j(x)dx$ ( $T -$ період, $a$ і $b -$ довільні числа, за умови існування інтегралів), коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами:

$$a_0 = \frac{2}{|b-a|}\int\limits_a^b f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{|b-a|}\int\limits_a^b f(x)\cos\frac{2p\,nx}{|b-a|}dx,$$

$$b_n = \frac{2}{|b-a|}\int\limits_a^b f(x)\sin\frac{2p\,nx}{|b-a|}dx, \quad n = 1, 2, ... \qquad (5)$$

<u>Приклад 3.</u> Функцію

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1; \\ 1, & 1 < x < 2; \end{cases}$$

розкласти в ряд Фур'є в інтервалі $(0;2)$.

Розв'язання. Розглянемо періодичну функцію з періодом $T = 2l = |b-a| = 2,$ яка на проміжку $(0;2)$ співпадає з заданою функцією $f(x)$ (рис.5).

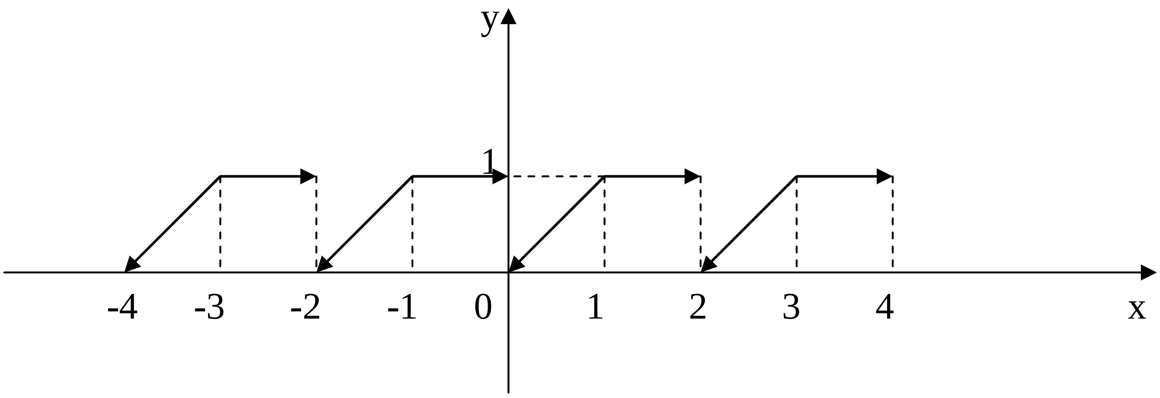


Рис. 5

Знайдемо коефіцієнти Фур'є за формулами (5).

$$a_0 = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 + x\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2};$$

$$a_n = \int_0^2 f(x)\cos p\, nxdx = \int_0^1 x\cos p\, nxdx + \int_1^2 \cos p\, nxdx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x & dv = \cos p\, nxdx \\ du = dx & v = \dfrac{\sin p\, nx}{p\, n} \end{matrix} \right| = \frac{x}{p\, n}\sin p\, nx\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin p\, nx}{p\, n}dx + \frac{\sin p\, nx}{p\, n}\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{\cos p\, nx}{p^2 n^2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{p^2 n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ -\dfrac{2}{p^2 n^2}, & n = 2k - 1; \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots;$$

$$b_n = \int_0^2 f(x)\sin p\, nxdx = \int_0^1 x\sin p\, nxdx + \int_1^2 \sin p\, nxdx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x & dv = \sin p\, nxdx \\ du = dx & v = -\dfrac{\cos p\, nx}{p\, n} \end{matrix} \right| = -\frac{x}{p\, n}\cos p\, nx\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos p\, nx}{p\, n}dx - \frac{\cos p\, nx}{p\, n}\Bigg|_1^2 =$$

$$= -\frac{1}{p\, n}(-1)^n + \frac{\sin p\, nx}{p^2 n^2}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{p\, n} + \frac{(-1)^n}{p\, n} = -\frac{1}{p\, n}.$$

Значить,

$$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{2}{p^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos p\,(2k-1)x}{(2k-1)^2} - \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin p\, nx}{n}, \quad x \in (0; 2).$$

### 4. *Ряди Фур'є для парних і непарних функцій.*

Нехай функція $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{p\, nx}{l} + b_n \sin\frac{p\, nx}{l} \qquad \text{при} \quad x \in (-l; l).$$

Припустимо, що $f(x) -$ парна ($f(-x) = f(x)$). Тоді коефіцієнти Фур'є можна записати в простішому вигляді:

$$\left.\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx, \\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{p\,nx}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{p\,nx}{l}dx, \\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{p\,nx}{l}dx = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Таким чином, ряд Фур'є для парної функції має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{p\,nx}{l}, \quad x \in (-l;l)$$

( парна функція розкладається в ряд Фур'є по косинусах).

Нехай $f(x)-$ непарна ($f(-x) = -f(x)$). Тоді коефіцієнти Фур'є зводяться до вигляду

$$\left.\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{p\,nx}{l}dx = 0, \\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{p\,nx}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{p\,nx}{l}dx. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Отже, ряд Фур'є для непарної функції записується так:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{p\,nx}{l}, \quad x \in (-l;l)$$

( непарна функція розкладається в ряд Фур'є по синусах).

<u>Приклад 4.</u> Функцію $f(x) = 1$ розкласти в інтервалі $(0;p)$ в ряд Фур'є по синусах. Користуючись одержаним розкладом, знайти суму ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}.$$

Розв'язання. Продовжимо функцію $f(x)$ на інтервал $(-p;0)$ непарним чином і періодично продовжимо одержану непарну функцію з періодом $T = 2p$. Тобто, нова функція $j(x)$ матиме вигляд (рис.6)

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in(0;\pi);\\ -1, & x\in(-\pi;0);\end{cases}\quad \varphi(x+2\pi)=\varphi(x).$$

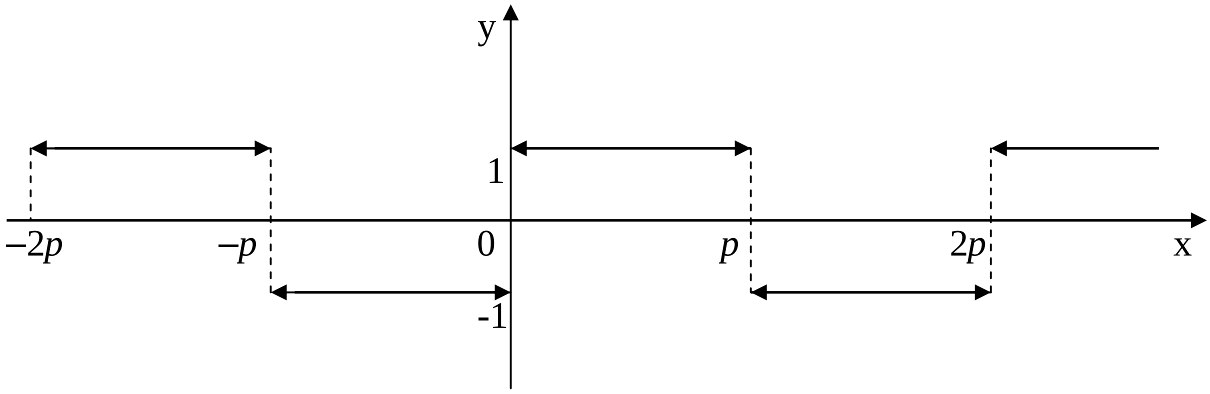


Рис. 6

Обчислимо коефіцієнти Фур’є за формулами (7):

$$a_0=a_n=0,\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=-\frac{2}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi}=-\frac{2}{\pi n}((-1)^n-1)=$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \dfrac{4}{\pi n}, & n=2k-1,\end{cases}\quad k=1,2,...$$

Так як функція $\varphi(x)$ задовольняє умовам теореми Діріхле, то ряд Фур’є цієї функції матиме суму $\varphi(x)$ в точках неперервності функції, а, значить, матиме суму 1 при $x\in(0;\pi)$.

Отже,

$$1=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1},\quad x\in(0;\pi). \qquad (8)$$

Покладемо в рівності (8) $x=\dfrac{\pi}{2}$. Отримуємо:

$$1=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{2k-1}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1},\quad \text{або}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}.$$

# РОЗДІЛ III. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

I. Знайти суму ряду

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$.

2. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+6n-8}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$.

5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+3)}$.

9. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n(n+1)(n+2)}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{36n^2-24n-5}$.

12. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{5n-2}{(n-1)n(n+2)}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+3n-20}$.

16. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{8n-10}{(n-1)(n+1)(n-2)}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2-8n-15}$.

18. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n-4}{n(n-1)(n-2)}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2+5n-6}$.

20. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5n-2}{(n-1)n(n+2)}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-35n-6}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{36n^2+12n-35}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+6}{n(n+1)(n+2)}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$.

26. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n^2-1)}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2+8n-15}$.

28. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3n+1}{(n-1)n(n+1)}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{36n^2-12n-35}$.

30. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4}{n(n-1)(n-2)}$.

II. Дослідити на збіжність ряд

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^{n-1}+n-1}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot tg\,\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+5}{n^2+4}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$.

5. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}arctg\,\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+3)^2}{n^5}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{n^5+\sin 2^n}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+\cos n}{3^n+\sin n}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\cos^2 6n}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}arctg\,\frac{p}{4\sqrt{n}}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$.

13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\sin\frac{1}{n-1}.$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}.$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}\left(e^{1/\sqrt{n}}-1\right).$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2+n+2}.$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\,arctg\,\frac{1}{n^3}.$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^3}{n^3+1}.$

19. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}n^3 tg^5\,\frac{p}{n}.$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}.$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{p}{n}\right).$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}.$

23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(e^{\sqrt{n}/(n^3-1)}-1\right).$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2p}{2n+1}}{\sqrt{n}}.$

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+7n}{5^n+n}.$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(e^{1/n}-1\right)^2.$

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}.$

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n}.$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n}{n^2\sqrt[3]{n}+5}.$

III. Дослідити на збіжність ряд

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n^2}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n 2n!}{(2n)!}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{3n+5} \cdot \frac{1}{2^n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \sin \frac{2}{3^n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg \frac{5}{n}}{n!}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} tg \frac{1}{5^n}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n^2-1)}{n!}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n (n+1)!}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{(2n+2)!!}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{p}{2^n}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)! 4^n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n-1)}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \ldots (2n+5)}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{\sqrt{2^n+3}}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n n^2}$.

28. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$.

IV. Дослідити на збіжність ряд

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n}{3n+1}\right)^{2n+1}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n/2}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin^n\frac{p}{2n}$.

5. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln n)^n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}n^3 arctg^n\frac{p}{3n}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5\cdot 3^n}{(2n+1)^n}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}e^{-n}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{n/2}}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{2^n}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n+2}}{5^n}$.

16. $\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}.$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{4^n}.$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}.$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}n^4\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}.$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}.$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{n}(n+1)^3.$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}.$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}.$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}n\arcsin^n\frac{p}{4n}.$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}.$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\frac{n}{5^n}.$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}.$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n}(n-1)^2.$

30. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}.$

V. Довести справедливість рівності з допомогою ряду, узявши в якості його загального члена загальний член заданої послідовності.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5}{(2n)!}=0.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{3n}}{n!}=0.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{n^n}=0.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n-1)!}=0.$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!!}{n^n}=0.$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)^n}{(2n+1)!}=0.$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n)!}{2^{n^2}}=0.$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{\left((n+1)!\right)^2}=0.$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{4^{n^2}}=0.$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{2^{n^2}}=0.$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!}{n^n}=0.$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(2n+3)!}=0.$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)!!}{n^n}=0.$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5n)^n}{(2n+1)!}=0.$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5n)!}{2^{n^2}}=0.$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{\left[(n+2)!\right]^2}=0.$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0.$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(2n)!}=0.$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!!}{n^n}=0.$

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)^n}{(2n-1)!}=0.$

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{2n^2\,!}=0.$

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0.$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!!}{5^{n^2}}=0.$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n!}=0.$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n^n}=0.$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(2n+1)!}=0.$

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{n^n}=0.$

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n)^n}{(2n-1)!}=0.$

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n)!}{2^{n^2}}=0.$

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^3}=0.$

VI. Дослідити ряд на збіжність

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln n}$.

2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$.

3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)\ln(3n+1)}$.

4. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2 n}$.

5. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}$.

6. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$.

7. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n-1)}$.

8. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}$.

9. $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}$.

10. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}$.

11. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}$.

12. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n/3)\ln^2(n+7)}$.

13. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(n^3+1)\ln n}$.

14. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{(n^2-3)\ln^2 n}$.

15. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n/3-1)\ln^2(n/2)}$.

16. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2+5)\ln n}$.

17. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{(2n^2+3)\ln n}$.

18. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n+1}{(5n^2-9)\ln(n-2)}$.

19. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\sqrt{\ln\ln n}}$.

20. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\ln n}$.

21. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(3n+1)}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(2n+1)}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$.

24. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$.

26. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$.

27. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$.

28. $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\ln(n-3)}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(2n)}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(2n)}$.

VII. Дослідити ряд на абсолютну і умовну збіжність.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

4. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln\ln n)\ln n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n^2}{n^4-n^2+1}$.

6. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$.

7. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[4]{2n+3}}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{p}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{p}{6n}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!}$.

12. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(2n)}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\frac{1}{n}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(3/2)^{n}}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n-1}{3n}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n+3)}{\ln(n+4)}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+1}{\sqrt{n^{3}}}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n} tg\,\frac{p}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}$.

21. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)2^{2n+1}}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n+\cos(2/\sqrt{n+4})}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\frac{p}{2^{n}}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{2}+\sin^{2} n}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin 3^{n}}{3^{n}}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^{2}}\right)$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\frac{1}{n}\cdot tg\frac{1}{n}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^{3}}{(n+1)!}$.

VIII. Обчислити суму ряду з точністю до $e$.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \quad e=0,01.$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n!(2n+1)}, \quad e=0,001.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}, \quad e=0,0001.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot n^{2}}{3^{n}}, \quad e=0,1.$

5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}, \quad e=0{,}0001.$

6. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n, \quad e=0{,}01.$

7. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n, \quad e=0{,}1.$

8. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n!}, \quad e=0{,}01.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n+1)}{(2n)!n!}, \quad e=0{,}001.$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n\cdot n!}, \quad e=0{,}001.$

11. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos p\,n}{3^n(n+1)}, \quad e=0{,}001.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(p/2+p\,n)}{n^3}, \quad e=0{,}01.$

13. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^n}, \quad e=0{,}001.$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2(n+3)}, \quad e=0{,}01.$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n^2}, \quad e=0{,}01.$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)^3}, \quad e=0{,}001.$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n^3(n+1)}, \quad e=0{,}01.$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{2^n}, \quad e=0{,}1.$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}, \quad e=0{,}001.$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!!}, \quad e=0{,}001.$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{7^n}, \quad e=0{,}0001.$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}, \quad e=0{,}001.$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!2n}, \quad e=0{,}00001.$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}, \quad e=0{,}001.$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!n!}, \quad e=0{,}00001.$

26. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}, \quad e=0{,}001.$

27. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{(n+1)^n}, \quad e=0{,}001.$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(p/2+p\,n)}{n^3+1}, \quad e=0{,}01.$

29. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^3}, \quad e=0{,}01.$

30. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(np)}{(n^3+1)^2}, \quad e=0{,}001.$

IX. Знайти область збіжності функціонального ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(2n-1)2^n};$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5^n(x+4)^n};$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3x^{2n}}{2n-1};$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n(x-3)^n};$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2^n(2n-1)};$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(2n+1)(x-4)^n};$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n+1)4^n};$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+3}{n(x-5)^{2n}};$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+3)\cdot 3^n};$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{(x+6)^n};$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(3n+1)3^n};$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n(x-6)^n};$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2^{3n-1}};$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n(x-2)^n};$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(x+1)^{2n}}{2n+3};$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n};$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 8^n};$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n(x-2)^n};$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n-1}}{2n-1};$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n(x-1)^{2n}};$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-3)^n}{(n^2+1)^2}$;

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n(x+2)^n}$;

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$;

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{x^n}$;

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$;

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{3^n(x+1)^n}$;

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$;

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(x+3)^n}$;

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^{n^2}}{n^{n+1}}$;

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2(x+2)^n}$.

X. Обчислити інтеграл з точністю до 0,001.

1. $\int_0^{0,5}\sqrt{1+x^3}\,dx$;

2. $\int_0^{0,5}\frac{\sin x^2}{x^2}dx$;

3. $\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^2}}$;

4. $\int_0^{0,1}\cos(10x^2)dx$;

5. $\int_0^{0,2}\frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x}dx$;

6. $\int_0^{0,25}\ln(1+\sqrt{x})dx$;

7. $\int_0^{0,5}e^{-0,16x^2}dx$;

8. $\int_0^{1}\sqrt[3]{x}\cos x\,dx$;

9. $\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+4x)}{x}dx$;

10. $\int_0^{0,5}\frac{1-\cos x}{x}dx$;

11. $\int\limits_0^1 \cos x^2 dx;$

12. $\int\limits_0^{0,1} e^{-8x^2} dx;$

13. $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x} dx;$

14. $\int\limits_0^{0,5} \frac{arctgx}{x} dx;$

15. $\int\limits_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx;$

16. $\int\limits_0^{0,5} xe^{-x^3} dx;$

17. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx;$

18. $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx;$

19. $\int\limits_0^{0,5} arctgx^2 dx;$

20. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^2}};$

21. $\int\limits_0^{0,1} e^{-2x^2} dx;$

22. $\int\limits_0^{0,1} \sin(10x^2) dx;$

23. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}};$

24. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^3}};$

25. $\int\limits_0^{0,5} \cos(4x^2) dx;$

26. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^4}};$

27. $\int\limits_0^{0,3} \frac{\ln(1+x)}{x} dx;$

28. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^5}};$

29. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^3}};$

30. $\int\limits_0^{0,1} \cos(10x^2) dx.$

XI. Знайти три перших відмінних від нуля члена розкладу в степеневий ряд розв'язку $y = y(x)$ диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, що задовольняє початковій умові $y(0) = y_0$

1. $y' = \sin(xy), \quad y(0) = 1;$
2. $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 2;$
3. $y' = y \sin x, \quad y(0) = 1;$
4. $y' = ye^x, \quad y(0) = 2;$
5. $y' = 2e^y + xy, \quad y(0) = 0;$
6. $y' = e^x + xy, \quad y(0) = 0;$
7. $y' = 1 + x^2 + y^3, \quad y(0) = -2;$
8. $y' = e^x + y^2, \quad y(0) = 0;$
9. $y' = 2x + \cos y, \quad y(0) = 0;$
10. $y' = \cos(xy), \quad y(0) = 1;$
11. $y' = 2e^y - xy, \quad y(0) = 0;$
12. $y' = y^2 - x, \quad y(0) = 1.$
13. $y' = x^2 - y^2, \quad y(0) = 1;$
14. $y' = e^x + y, \quad y(0) = 4;$
15. $y' = y + xe^y, \quad y(0) = 0;$
16. $y' = -3x - y^3, \quad y(0) = 1;$
17. $y' = \sin x + 0,5y^2, \quad y(0) = 1;$
18. $y' = xy + e^{-y}, \quad y(0) = 0;$
19. $y' = xy^2 - y, \quad y(0) = 2;$
20. $y' = x + x^2 - y^2, \quad y(0) = 5;$
21. $y' = x + x^2 y, \quad y(0) = 1;$
22. $y' = -2xy, \quad y(0) = 1;$
23. $y' = \cos x + y^2, \quad y(0) = 1;$
24. $y' = xy^2 + 1, \quad y(0) = 2;$
25. $y' = 2\sin x - xy^2, \quad y(0) = 1;$
26. $y' = y + y^2, \quad y(0) = 3;$
27. $y' = y \cos x + x, \quad y(0) = 1;$
28. $y' = xy + 2y, \quad y(0) = 2;$
29. $y' = \sin x + y^2, \quad y(0) = 1;$
30. $y' = 1 - xy, \quad y(0) = 0.$

XI. Розкласти дану функцію $y = f(x)$ в ряд Фур'є на заданому проміжку

1. $y = \frac{p}{4} - \frac{x}{2}, \quad x \in (0; p),$ по косинусах;

2. $y = |x|, \quad x \in (-p; p);$

3. $y = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0, \\ 3, & 0 < x < 1, \end{cases} \quad x \in (-1;0) \cup (0;1);$

4. $y = 5x, \quad x \in (0;1),$ по косинусах;

5. $y = 1 - \frac{x}{2}, \quad x \in (0; p),$ по косинусах;

6. $y = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1, \\ 1, & 1 < x < p, \end{cases} \quad x \in (0; p),$ по синусах;

7. $y = x - 1, \quad x \in (0;1);$

8. $y = 2x, \quad x \in (0; p),$ по косинусах;

9. $y = 2x - 1, \quad x \in (0; p),$ по синусах;

10. $y = x^2, \quad x \in (-p; p);$

11. $y = x, \quad x \in (0;1);$

12. $y = 3x + 1, \quad x \in (0; 2),$ по синусах;

13. $y = x^2, \quad x \in (0; p),$ по косинусах;

14. $y = 1 - \frac{x}{2}, \quad x \in (-p; p);$

15. $y = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1, \\ 1, & 1 < x < p, \end{cases} \quad x \in (0; p),$ по косинусах;

16. $y=\begin{cases} x, & 0<x\le 1, \\ 2-x, & 1<x<2, \end{cases}$ $x\in(0;2)$, по синусах;

17. $y=x^2$, $x\in(-1;1)$;

18. $y=5x+2$, $x\in(-p;p)$;

19. $y=2-x$, $x\in(0;1)$, по синусах;

20. $y=x^2$, $x\in(0;p)$, по синусах;

21. $y=\begin{cases} 1, & 0<x<1, \\ 0, & 1<x<p, \end{cases}$ $x\in(0;1)\cup(1;p)$, по косинусах;

22. $y=3x$, $x\in(-p;p)$;

23. $y=3x+1$, $x\in(0;2)$, по косинусах;

24. $y=2x$, $x\in(-1;1)$;

25. $y=|x|$, $x\in(-1;1)$;

26. $y=\begin{cases} -1, & -p<x<0, \\ 1, & 0<x<p, \end{cases}$ $x\in(-p;0)\cup(0;p)$;

27. $y=\begin{cases} 1, & 0<x<1, \\ 0, & 1<x<p, \end{cases}$ $x\in(0;p)$, по синусах;

28. $y=\begin{cases} 0, & -p<x<0, \\ 1, & 0<x<p, \end{cases}$ $x\in(-p;0)\cup(0;p)$;

29. $y=\begin{cases} x, & 0<x\le 1, \\ 2-x, & 1<x<2, \end{cases}$ $x\in(0;2)$, по косинусах;

30. $y=\begin{cases} -x, & -p<x\le 0, \\ 0, & 0<x<p, \end{cases}$ $x\in(-p;p)$.

# ЛІТЕРАТУРА

1.Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. т. 2 – М.: Наука, 1972.

2.Бугров Я. С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1984.

3.Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Посібник для вузів. – К.: Видав. А.С.К., 2001.

4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. т.2 - М.: Физматлит, 2001.

5.Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1975.

6.Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1990.

7.Вища математика. Збірник задач за ред. В.П.Дубовика, І.І.Юрика. – К.: Видав. А.С.К., 2003.

**ЗМІСТ**