МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Розділ: **ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ТА ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ**

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів
напряму підготовки 6.050504 „Зварювання”

ЗАТВЕРДЖЕНО ВЧЕНОЮ РАДОЮ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОГО
ФАКУЛЬТЕТУ НТУУ „КПІ”

Київ

2013

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Розділ: ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ТА ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ:

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів

напряму підготовки 6.050504 „Зварювання”

Укладачі: Довгай В.В., Мельник А.Ф., 2013 – 67с.

Затверджено Вченою Радою фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»

(Протокол № 3 від 28 травня 2013р.)

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Розділ: ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ТА ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ:

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів

напряму підготовки 6.050504 „Зварювання”

Укладачі: Довгай В.В., Мельник А.Ф.

Рецензент:Рижов Р.М., д.т.н., проф. кафедри ЕЗУ НТУУ „КПІ”.

Відповідальний редактор: Швець О.Ю., д.ф.-м.н., проф. кафедри математичної фізики НТУУ «КПІ».

ВСТУП

В третьому семестрі програмою з вищої математики на зварювальному факультеті НТУУ „КПІ” передбачено розділ „Елементи теорії функцій комплексної змінної ”. При вивченні даного розділу студенти знайомляться з поняттями комплексного числа, послідовності та ряду з комплексними членами, функції комплексної змінної, її похідної, деякими елементарними функціями комплексної змінної, оволодівають методами інтегрування функцій комплексної змінної, вчаться розкладати функції в степеневий ряд та в ряд Лорана та застосовувати перетворення Лапласа для розв'язання диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь.

Методичні вказівки написані відповідно до програми і включають основні теоретичні відомості та приклади розв'язання типових задач, а також завдання для самостійної роботи студентів і список літератури, рекомендованої для детальнішого ознайомлення з темою.

Мета пропонованих методичних вказівок – допомогти студентам зварювального факультету глибше засвоїти вказаний матеріал, розвинути навички застосування теоретичних знань до розв'язання конкретних задач та активізувати самостійну роботу студентів.

Методичні вказівки призначені для використання на практичних заняттях з вищої математики та для самостійної роботи студентів.

§1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Означення 1. **Комплексним числом** називається вираз вигляду $a+ib$, де $a,b-$ дійсні числа, $i-$ символ, який називатимемо **уявною одиницею.**

Якщо $z=a+ib$, то a називається **дійсною частиною** комплексного числа і позначається $\operatorname{Re} z$, а $b-$ **уявною частиною** і позначається $\operatorname{Im} z$.

Введемо для комплексних чисел операції додавання та множення.

Означення 2. **Сумою** комплексних чисел $z_1=a_1+ib_1$ та $z_2=a_2+ib_2$ називається число $z_1+z_2=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$.

Властивості додавання комплексних чисел:

1) комутативність: $z_1+z_2=z_2+z_1$;
2) асоціативність: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$;
3) існує число 0 таке, що $z+0=z$;
4) для довільного комплексного числа z існує число $(-z)$ таке, що $z+(-z)=0$.

Означення 3. **Добутком** комплексних чисел $z_1=a_1+ib_1$ та $z_2=a_2+ib_2$ називається число $z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$.

Властивості множення комплексних чисел:

1) комутативність: $z_1z_2=z_2z_1$;
2) асоціативність: $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$;
3) дистрибутивність: $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$;

4) існує число 1 таке, що $z \cdot 1 = z$;

5) для довільного комплексного числа $z \neq 0$ існує число $\frac{1}{z}$ таке, що

$z \cdot \frac{1}{z} = 1.$

Нехай $z_1 = z_2 = i.$ За правилом множення комплексних чисел

$z_1 z_2 = -1,$ тобто $i^2 = -1.$

Множину комплексних чисел з введеними операціями додавання та множення позначатимемо K. У множині комплексних чисел довільне квадратне рівняння має два корені. Наприклад, розв'язками квадратного рівняння $x^2 + 4x + 5 = 0$ є числа $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 \pm i.$

<u>Означення 4.</u> **Спряженим** до числа $z = a + ib$ називається число $\overline{z} = a - ib$.

$$z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2.$$

Наприклад, якщо $z_1 = 5 - 2i,$ $z_2 = 3 + 4i,$ то $z_1 + z_2 = 8 + 2i$;

$z_1 z_2 = 23 + 14i;$ $\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{(5-2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{7-26i}{9+16} = \frac{7}{25} - \frac{26}{25}i.$

Для геометричної інтерпретації комплексних чисел введемо систему координат на площині, яка визначається початком координат, двома взаємно перпендикулярними осями та масштабною одиницею (так звану комплексну площину). Вісь абсцис (x) будемо називати **дійсною віссю**, а вісь ординат – **уявною** (і позначати iy). Комплексне число $z = x + iy$ зображається точкою (або радіусом – вектором) комплексної площини (рис.1).

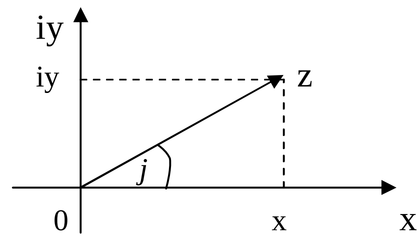

Рис.1

Відстань від точки z до початку координат називається **модулем** числа z: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а кут, який утворює радіус – вектор точки z з дійсною віссю, називається **аргументом** числа $z \neq 0$: $j = Argz$. Якщо радіус – вектор здійснить кілька повних обертів навколо дійсної осі, то кожне таке значення кута теж вважається аргументом z. Тобто $Argz$ є багатозначною функцією і має місце формула $Argz = \arg z + 2pn, \quad n \in Z$, де $\arg z$ називають **головним значенням** аргумента, $-p < \arg z \leq p$. Значення $\arg z$ знаходимо з рівностей $\sin j = \frac{y}{|z|}; \quad \cos j = \frac{x}{|z|}$; або з умови

$tg j = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0,$ тобто

$$\arg z = \begin{cases} arctg\frac{y}{x}, & x > 0; \\ arctg\frac{y}{x} + p, & y \geq 0, \quad x < 0; \\ arctg\frac{y}{x} - p, & y < 0, \quad x < 0; \\ \frac{p}{2}, & x = 0, \quad y > 0; \\ -\frac{p}{2}, & x = 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

Число $z = 0$ не має аргумента.

Довільне комплексне число може бути представлене в **тригонометричній формі**:

$$z = x + iy = |z|\cos j + i|z|\sin j = |z|(\cos j + i\sin j).$$

Піднесення до степеня та добування кореня з комплексного числа виконуємо за формулами:

$$z^n = |z|^n(\cos nj + i\sin nj), \quad n \in N; \tag{1}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{j + 2kp}{n} + i\sin\frac{j + 2kp}{n}\right), \quad k = 0,1,\dots,n-1, \tag{2}$$

причому (1) називають **формулою Муавра**.

<u>Приклад 1.</u> Обчислити $\left(1-\sqrt{3}i\right)^{10}$.

Розв’язання. Нехай $z = 1-\sqrt{3}i$. Тоді $x = 1$, $y = -\sqrt{3}$, $|z| = 2$, $\sin j = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos j = \frac{1}{2}$, тобто $j = -\frac{p}{3}$. Отже, $1-\sqrt{3}i =$
$= 2\left(\cos\left(-\frac{p}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{p}{3}\right)\right)$ і за формулою Муавра

$$\left(1-\sqrt{3}i\right)^{10} = 2^{10}\left(\cos\left(-\frac{10p}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{10p}{3}\right)\right) = 1024\left(\cos\frac{10p}{3} - i\sin\frac{10p}{3}\right) =$$

$$= 1024\left(\cos\frac{4p}{3} - i\sin\frac{4p}{3}\right) = 1024\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 512\left(-1 + i\sqrt{3}\right).$$

<u>Приклад 2.</u> Обчислити $\sqrt[3]{i}$.

Розв’язання. Покладемо $z = i = 0 + 1i$. Тоді $|z| = 1$, $\sin j = 1$, $\cos j = 0$, значить $j = \frac{p}{2}$. За формулою (2) $\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{p}{2} + 2kp}{3} + i\sin\frac{\frac{p}{2} + 2kp}{3}\right)$,

$k=0,1,2.$ Тобто $\sqrt[3]{i}$ приймає три значення: $z_1=\cos\frac{p}{6}+i\sin\frac{p}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$;

$z_2=\cos\frac{5p}{6}+i\sin\frac{5p}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; $\qquad z_3=\cos\frac{3p}{2}+i\sin\frac{3p}{2}=-i.$

Зауважимо, що всім значенням $\sqrt[n]{z}$ відповідають точки, які лежать на колі з радіусом $\sqrt[n]{|z|}$ і ділять коло на n рівних частин.

<u>Приклад 3.</u> Зобразити на комплексній площині множину точок, що визначається умовою: $|z-z_0|\le R,\quad z_0=x_0+iy_0,\quad R>0$.

Розв’язання. Нехай $z=x+iy$. Має виконуватись умова $|x+iy-(x_0+iy_0)|\le R,$ тобто $|(x-x_0)+i(y-y_0)|\le R \;\Rightarrow$ $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\le R \;\Rightarrow\; (x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le R^2.$ Це є круг з центром в точці z_0 і радіусом R (рис. 2).

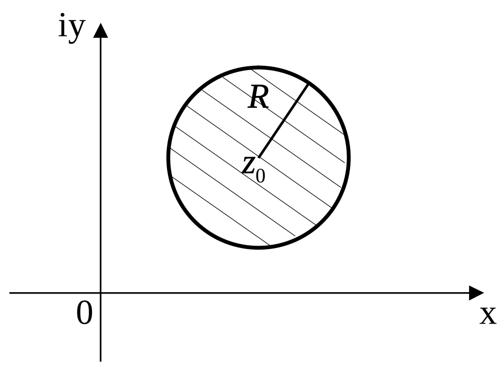

Рис.2

§2. ПОСЛІДОВНОСТІ ТА РЯДИ З КОМПЛЕКСНИМИ ЧЛЕНАМИ

Означення 1. $e-$**околом** точки z_0 називається множина точок z круга $|z-z_0|<e$.

Нехай задана послідовність комплексних чисел $z_1, z_2, ..., z_n, ...$

Означення 2. Число c називається **границею** послідовності z_n при $n \to \infty$ (позначаємо $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$), якщо для будь-якого як завгодно малого числа $e>0$ знайдеться номер $N(e)$ такий, що для всіх номерів $n \geq N(e)$ виконується нерівність: $|z_n - c| < e$.

Послідовність, що має границю, називається **збіжною**. Твердження $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$ геометрично означає, що всі точки z_n, починаючи з номера $n = N(e)$, попадають в $e-$окіл точки c.

Теорема 1. Нехай $z_n = x_n + iy_n, \quad n = 1, 2, ..., \quad c = a + ib, \quad x_n, y_n, a, b \in R.$ Для того, щоб $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c,$ необхідно і досить виконання умов: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b.$

Теорема 1 показує, що обчислення границі послідовності комплексних чисел z_n зводиться до знаходження границь послідовностей x_n, y_n дійсних чисел. Виходячи з властивостей останніх, легко отримати властивості послідовностей комплексних чисел. Зокрема, має місце

Теорема 2. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c, \quad \lim\limits_{n\to\infty} w_n = d.$ Тоді

$$1) \lim_{n\to\infty} (z_n \pm w_n) = c \pm d; \qquad 2) \lim_{n\to\infty} z_n w_n = cd;$$

$$3) \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{c}{d}, \quad \text{якщо} \quad d \neq 0.$$

Приєднаємо до множини комплексних чисел невласне число ∞ (нескінченність). Будемо вважати, що числу ∞ відповідає так звана **нескінченно віддалена точка**, яку неможливо зобразити на комплексній площині. Околом нескінченно віддаленої точки вважатимемо множину точок, що знаходяться зовні довільного круга.

<u>Означення 3.</u> Кажуть, що $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, якщо для довільного як завгодно великого числа $R > 0$ знайдеться номер $N(R)$ такий, що для всіх номерів $n \geq N(R)$ справджується умова: $|z_n| > R$.

Геометрично це означає, що при $n \geq N(R)$ точки z_n лежать поза кругом радіуса R. Очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$.

<u>Означення 4.</u> Вираз вигляду

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, \tag{1}$$

де z_n, $n = 1, 2, \ldots, -$ комплексні числа, називають **числовим рядом**.

Суми $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$, $n = 1, 2, \ldots,$ називаються **частинними сумами** ряду. Ряд (1) називають **збіжним**, якщо існує скінченна $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Число S називається **сумою ряду**. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ або не існує, то ряд (1) називають **розбіжним**.

<u>Теорема 3.</u> Нехай $z_n = x_n + iy_n$; $x_n, y_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ є збіжним і має суму $a + ib$ тоді і тільки тоді, коли ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ є збіжними з сумами a і b відповідно.

Таким чином, збіжність ряду з комплексними членами зводиться до збіжності двох рядів з дійсними членами, а тому для числових рядів у комплексній площині зберігаються основні властивості рядів з дійсними членами.

<u>*Означення 5.*</u> Ряд (1) називають **абсолютно збіжним**, якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|z_n\right| < \infty$.

<u>Теорема 4.</u> Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x_n + iy_n\right), \quad x_n, y_n \in R,$ є абсолютно збіжним тоді і тільки тоді, коли ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n, \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ - абсолютно збіжні.

<u>Приклад 1.</u> Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{p}{n} + i\cos\frac{p}{n}\right). \qquad (2)$$

Розв'язання. Дослідимо на збіжність ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{p}{n}, \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{p}{n}$.

Оскільки $\frac{1}{n}\sin\frac{p}{n} : \frac{p}{n^2}$ при $n \to \infty$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p}{n^2}$ - збіжний, то за ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{p}{n}$ - збіжний. Однак, $\frac{1}{n}\cos\frac{p}{n} : \frac{1}{n}$ при $n \to \infty$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - розбіжний, тому за ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{p}{n}$ - розбіжний. За теоремою 3 ряд (2) розбіжний.

<u>Приклад 2.</u> Дослідити на абсолютну збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2i)^n}$.

Розв'язання. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$, складений із модулів членів даного ряду, і дослідимо його за ознакою Коші. Так як $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ - збіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2i)^n}$ - абсолютно збіжний.

<u>*Означення 6.*</u> **Степеневим рядом** називається вираз вигляду

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ... + a_n(z - z_0)^n + ..., \qquad (3)$$

де z - комплексна змінна, $z_0, a_k, k = 0,1,2,...$ - комплексні числа.

<u>Теорема 5</u> (**Абеля**). Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ є збіжним у точці z_1 і розбіжним у точці z_2, то він абсолютно збіжний для довільного z такого, що $|z| < |z_1|$, і розбіжний для всіх z таких, що $|z| > |z_2|$.

Теорема Абеля дозволяє описати область збіжності степеневого ряду.

<u>Теорема 6.</u> Існує число $0 \le R \le \infty$ таке, що ряд (3) є абсолютно збіжним при $|z - z_0| < R$ і розбіжним при $|z - z_0| > R.$

Число R називають **радіусом збіжності**, а круг $|z - z_0| < R$ - **кругом збіжності** степеневого ряду. При $R = 0$ круг збіжності стягується в точку $z = z_0$, а при $R = \infty$ співпадає з усією комплексною площиною.

Враховуючи абсолютну збіжність ряду (3) в крузі $|z - z_0| < R$, для визначення круга збіжності розглядаємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z - z_0|^n$ і застосовуємо до нього ознаку Даламбера або Коші.

<u>Приклад 3.</u> Знайти круг збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n. \qquad (4)$$

Розв'язання. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} |z|^n$ і застосуємо до нього ознаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! |z|^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} n! |z|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|z| n^n}{(n+1)^{n+1}} = |z| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|z|}{e}.$$

Якщо $\frac{|z|}{e} < 1$, тобто $|z| < e$, ряд (4) абсолютно збіжний. При $|z| > e$ ряд розбіжний.

§3. ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Означення 1. Якщо кожному числу z з множини $E \subset K$ відповідає число $w \in V \subset K$, то кажуть, що задана **функція комплексної змінної** $w = f(z)$.

Наприклад, $w = z^2$. Нехай $z = x + iy$, тоді

$$w = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = (x^2 - y^2) + i2xy = u(x;y) + iv(x;y).$$

Будемо називати $u(x;y)$ - **дійсною частиною**, а $v(x;y)$ **-уявною частиною** функції $w = f(z)$, і позначати $\mathrm{Re}\, f(z)$ і $\mathrm{Im}\, f(z)$ відповідно. Тобто задання функції комплексної змінної $f(z)$ рівносильно заданню двох функцій двох дійсних змінних.

Означення 2. Нехай функція $f(z)$ задана на множині $E \subset K$. Число c називається **границею** $f(z)$ при $z \to z_0$ $\left(\lim_{z\to z_0} f(z) = c \right)$, якщо для довільного як завгодно малого числа $e > 0$ знайдеться число $d(e) > 0$

таке, що для всіх $z \in E, \quad 0 < |z - z_0| < d(e)$, виконується нерівність: $|f(z) - c| < e$.

<u>Означення 3.</u> Кажуть, що $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$.

<u>Теорема 1.</u> Нехай $f(z) = u(x;y) + iv(x;y), \; z = x + iy, \quad z_0 = x_0 + iy_0$, $c = a + ib$. Умова $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x;y) = a, \quad \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x;y) = b.$

Основні властивості границь функцій дійсної змінної залишаються справедливими і для функцій комплексної змінної.

<u>Означення 4.</u> Нехай функція $f(z)$ задана в деякому околі точки z_0. $f(z)$ називається **неперервною** в точці z_0, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Функція $f(z)$ називається неперервною на множині $G \subset K$, якщо вона неперервна в кожній точці G.

Розглянемо основні елементарні функції комплексної змінної. Покладемо за означенням:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

де ряди є збіжними для всіх $z \in K$.

Розклавши в ряд функцію

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \ldots + \frac{(iz)^n}{n!} + \ldots = 1 + \frac{iz}{1!} - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots =$$

$$=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...\right)+i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...\right)=\cos z+i\sin z,$$

одержуємо відому **формулу Ейлера**:

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z. \qquad (1)$$

Формула (1) дозволяє записати комплексне число в **показниковій формі:** $z=|z|(\cos j+i\sin j)=|z|e^{ij}$.

За формулою Ейлера

$$e^{-iz}=\cos z-i\sin z. \qquad (2)$$

Додаючи і віднімаючи рівності (1) і (2), виражаємо тригонометричні функції через показникову:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}; \quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i};$$

або $\cos iz=chz, \quad \sin iz=ishz.$

Функції $e^z,\sin z,\cos z$ зберігають основні властивості аналогічних функцій дійсної змінної, але мають і особливості. Так, e^z є **періодичною** з періодом $2pi$. Дійсно, $e^{z+2pi}=e^z e^{2pi}=e^z(\cos 2p+i\sin 2p)=e^z$. А $\sin z$ і $\cos z$ в комплексній площині є **необмеженими**. Переконаємося в цьому:

$$\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cos iy+\cos x\sin iy=\sin xchy+i\cos xshy, \qquad (3)$$

$$\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy=\cos xchy-i\sin xshy. \qquad (4)$$

Обчислювати значення $e^z,\sin z,\cos z$ з допомогою рядів незручно. Тому для знаходження $\sin z,\cos z$ використовуємо формули (3), (4), а e^z представляємо у вигляді: $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$. Також покладемо за означенням $tgz=\frac{\sin z}{\cos z}, \quad ctgz=\frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z=\frac{1}{\cos z}, \quad \cos ecz=\frac{1}{\sin z}.$

<u>Означення 5.</u> **Логарифмічною функцією** комплексної змінної назвемо функцію $w = Lnz$, якщо $e^w = z.$

Покладемо $w = u + iv.$ Тоді $e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = e^u(\cos v + i\sin v) = z.$

Звідси $|z| = e^u$; а значить, $u = \ln|z|$, і $v = \arg z + 2p\,k, \quad k \in Z.$ Отже, справедлива формула

$$Lnz = \ln|z| + i(\arg z + 2p\,k), \quad k \in Z. \tag{5}$$

Вираз $\ln|z| + i\arg z$ позначають $\ln z$ і називають **головним значенням логарифма**. Lnz - нескінченнозначна функція, визначена на всій комплексній площині, за винятком точки $z = 0.$

Наприклад, $Ln1 = 2p\,ki, \quad Lne = 1 + 2kp\,i,$

$$Ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{p}{4} + 2p\,k\right) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{p\,i}{4}(8k+1), \quad k \in Z.$$

Для комплексних чисел $z, w \neq 0$ властивості $Ln(zw) = Lnz + Lnw,$ $Ln\left(\frac{z}{w}\right) = Lnz - Lnw$ слід розуміти в сенсі, що множини значень лівої і правої частини рівностей співпадають. Інше розуміння приводить до неправильних тверджень. Зокрема, $Ln(-z) - Ln(z) = Ln\left(\frac{-z}{z}\right) = Ln\left(\frac{z}{-z}\right) =$ $= Ln(z) - Ln(-z) \Rightarrow 2Ln(-z) = 2Lnz \Rightarrow Ln(-z) = Lnz$ (софізм Бернуллі).

<u>Означення 6.</u> Нехай $a, b \in K, \quad a \neq 0.$ Покладемо за означенням $a^b = e^{bLna}.$ Тоді $a^z = e^{zLna}, \quad a \neq 0; \quad z^a = e^{aLnz}, \quad z \neq 0.$

<u>Приклад 1.</u> Виділити дійсну та уявну частину функції:

а) $f(z) = \dfrac{1}{z};$ б) $f(z) = e^{z^2}.$

Розв'язання. а) Нехай $z = x + iy.$ Тоді $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} =$

$$= \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$ Отже,

$$u(x;y) = \frac{x}{x^2+y^2}; \quad v(x;y) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

б) $f(z) = e^{z^2} = e^{(x+iy)^2} = e^{x^2-y^2+2ixy} = e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + i\sin 2xy).$ Значить,

$$u(x;y) = e^{x^2-y^2}\cos 2xy; \quad v(x;y) = e^{x^2-y^2}\sin 2xy.$$

Приклад 2. Обчислити: а) i^i; б) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{1-i}$.

Розв’язання. а) $i^i = e^{iLni} = e^{i(\ln 1 + i\arg i + 2kp i)} = e^{i\left(i\frac{p}{2}+2kp i\right)} = e^{-\left(\frac{p}{2}+2kp\right)}, \quad k \in Z.$

б) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{1-i} = e^{(1-i)Ln\left(\sqrt{3}+i\right)} = e^{(1-i)\left(\ln 2 + i\frac{p}{6}+2kp i\right)} = e^{\ln 2+\frac{p}{6}+2kp+i\left(\frac{p}{6}+2kp-\ln 2\right)} =$

$$= 2e^{\frac{p}{6}+2kp}\left(\cos\left(\frac{p}{6}-\ln 2\right)+i\sin\left(\frac{p}{6}-\ln 2\right)\right), \quad k \in Z.$$

§4. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. УМОВИ КОШІ – РІМАНА

Означення 1. Нехай функція $f(z)$ задана в деякому околі точки $z.$ Якщо існує скінченна $\lim\limits_{\Delta z \to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, то цю границю називають **похідною** від $f(z)$ в точці $z,$ і позначають $f'(z).$

Якщо $f'(z)$ існує, то $f(z)$ називається **диференційовною** в точці $z.$ З означення похідної і властивостей границі функції в точці випливає, що основні правила диференціювання, які мали місце для функцій дійсної змінної, залишаються справедливими і для функцій комплексної змінної.

Теорема 1. Нехай функція $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ визначена в деякому околі точки $z=x+iy.$ Для того, щоб $f(z)$ була диференційовною в точці z, необхідно і достатньо, щоб $u(x;y),\quad v(x;y)$ були диференційовними в точці $M(x;y)$ і їх частинні похідні задовольняли умовам

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Якщо виконані умови (1), похідну $f'(z)$ можна знайти за формулою

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\ldots \tag{2}$$

Умови (1) називаються умовами **Коші – Рімана** (або **Даламбера – Ейлера).**

Означення 2. Функція $f(z)$ називається **аналітичною** в точці z_0, якщо вона диференційовна в деякому околі точки z_0. $f(z)$ називається аналітичною в області $D\subset K,$ якщо вона аналітична в кожній точці цієї області.

Приклад 1. Перевірити, чи є аналітичною функція $f(z)$, і, якщо функція аналітична, знайти її похідну: а) $f(z)=\sin z;$ б) $f(z)=z\operatorname{Re} z^2.$

Розв’язання. а) За формулою (3) §3 $\sin z=\sin x ch y+i\cos x sh y.$ Значить, $u(x;y)=\sin x ch y,\quad v(x;y)=\cos x sh y.$ Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x ch y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\sin x sh y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\sin x sh y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\cos x ch y.$$

Бачимо, що $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ і $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, тобто умови Коші – Рімана виконуються в довільній точці $M(x;y)$. Отже, $\sin z$ є аналітичною функцією в усій комплексній площині. За формулою (2)

$$(\sin z)' = \cos x ch y - i\sin x sh y = \cos x\cos iy - \sin x\sin iy = \cos(x+iy) = \cos z.$$

б) Нехай $z=x+iy$, тоді $z\operatorname{Re}z^2=(x+iy)\operatorname{Re}(x+iy)^2=$

$=(x+iy)\operatorname{Re}(x^2+2ixy-y^2)=(x+iy)(x^2-y^2)=(x^3-xy^2)+i(x^2y-y^3).$ Отже, $u(x;y)=x^3-xy^2,\quad v(x;y)=x^2y-y^3.$ Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-y^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2xy;\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=2xy,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=x^2-3y^2.$$

Перша умова Коші – Рімана не виконується в жодній області, тому функція $f(z)=z\operatorname{Re}z^2$ не є аналітичною.

Аналітичними в усій комплексній площині є, наприклад, довільний многочлен, дробово – раціональна функція (за винятком коренів знаменника), e^z, $\sin z$, $\cos z$.

Якщо функція $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ аналітична в області D, то її дійсна та уявна частини задовольняють **рівнянню Лапласа**:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$ і називаються **гармонічними** функціями.

Однак, якщо $u(x;y)$ і $v(x;y)$ – гармонічні функції, то $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ не завжди є аналітичною. Якщо задати тільки одну з гармонічних функцій $u(x;y)$ чи $v(x;y)$, то інша визначається з точністю до константи.

Приклад 2. Знайти аналітичну функцію $f(z)=u+iv$, якщо $v=arctg\frac{y}{x}$ в області $\operatorname{Re}z>0$, і $f(1)=0$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні заданої функції:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}; \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

З першої умови Коші – Рімана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$ і, інтегруючи по змінній x, знаходимо $u=\int\frac{x}{x^2+y^2}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C(y).$ За другою умовою Коші – Рімана $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2}$, а, з іншого боку, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}+C'(y).$ Прирівнюючи вирази $\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{y}{x^2+y^2}+C'(y)$, одержуємо: $C'(y)=0\Rightarrow C(y)=C.$

Отже, $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C,$ і $f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C+iarctg\frac{y}{x}.$ Для знаходження константи C використаємо початкову умову $f(1)=0.$ Якщо $z=x+iy=1,$ то $x=1,$ $y=0$ і $f(z)=0$, тобто $0=\frac{1}{2}\ln 1+C+iarctg0,$ $C=0.$ Шуканою аналітичною функцією є $f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+iarctg\frac{y}{x},$ яку ще можна записати у вигляді: $f(z)=\frac{1}{2}\ln|z|^2+i\arg z=\ln|z|+i\arg z=\ln z.$

§5. ІНТЕГРАЛ В КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ

Нехай L – кусково-гладка крива в комплексній площині і функція $f(z)$ задана в точках кривої $L.$ Розіб'ємо криву L на частини точками

$A = z_0, z_1, z_2, ..., \quad z_k, z_{k+1}, ..., z_n = B,$ де $A-$початкова, а $B-$кінцева точки $L.$ Позначимо через $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$ і $l_k -$довжину дуги $z_k z_{k+1}, \; k = 0,1,2,...,$ $n-1.$ На кожній з дуг $z_k z_{k+1}$ виберемо точку V_k (рис.3).

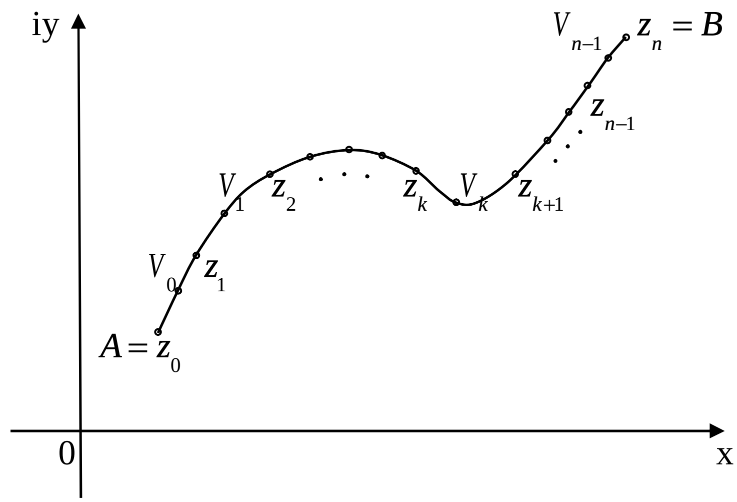

Рис.3

Складемо для $f(z)$ інтегральну суму $\sum_{k=0}^{n-1} f(V_k)\Delta z_k$ і позначимо через $l = \max_{0 \le k \le n-1} l_k.$

<u>*Означення 1.*</u> Якщо існує скінченна $\lim_{l \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(V_k)\Delta z_k,$ яка не залежить від способу розбиття L на частини і від способу вибору точок $V_k,$ то така границя називається **інтегралом від функції** $f(z)$ **вздовж кривої** L**,** і позначається $\int_L f(z)dz.$

Інтеграл в комплексній площині має наступні властивості:

1) якщо $f(z)$ неперервна в точках кусково-гладкої кривої $L,$ то $\int_L f(z)dz$ існує;

2) $\int\limits_L (f(z)+g(z))dz = \int\limits_L f(z)dz + \int\limits_L g(z)dz;$

3) $\int\limits_L cf(z)dz = c\int\limits_L f(z)dz;$

4) $\int\limits_{ABC} f(z)dz = \int\limits_{AB} f(z)dz + \int\limits_{BC} f(z)dz;$

5) $\left|\int\limits_L f(z)dz\right| \le l\cdot\max\limits_{z\in L}|f(z)|,$ де $l-$довжина кривої L (вважаємо, що всі інтеграли 2) – 5) існують).

Як обчислювати інтеграл в комплексній площині?

1) Нехай $z = x+iy,\quad dz = dx+idy,\quad f(z) = u(x;y)+iv(x;y).$ Тоді

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L (u+iv)(dx+idy) = \int\limits_L udx - vdy + i\int\limits_L udy + vdx. \qquad (1)$$

За формулою (1) $\int\limits_L f(z)dz$ зводиться до криволінійних інтегралів другого роду вздовж кривої $L.$

2) Нехай $L-$гладка крива, яка задана параметричним рівнянням: $z(t) = x(t)+iy(t),\quad a\le t\le b.$ Якщо функція $f(z)$ неперервна в точках кривої $L,$ то справедлива формула

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_a^b f(z(t))z'(t)dt. \qquad (2)$$

Формулу (2) зручно використовувати, коли $L-$коло або частина кола $|z-z_0| = R.$ В параметричному вигляді рівняння кола запишеться як $z = z_0 + \mathrm{Re}^{it},\quad 0\le t\le 2p.$

3) Якщо функція $f(z)$ аналітична в області $D,$ то вона має в цій

області первісну $F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt,\quad z_0, z\in D,$ ($F'(z)=f(z)$ для всіх $z\in D$)

і справедливе **узагальнення формули Ньютона – Лейбніца**

$$\int\limits_{z_A}^{z_B} f(z)dz = F\left(z_B\right)-F\left(z_A\right), \tag{3}$$

де z_A і z_B – початкова та кінцева точки кривої, що лежить в області D.

<u>Приклад 1.</u> Обчислити $\int\limits_L z\operatorname{Im} z dz,$ якщо L – дуга параболи $y=2x^2$ від точки $z_A=0$ до точки $z_B=1+2i$.

Розв’язання.

$$\int\limits_L z\operatorname{Im} zdz=\int\limits_L (x+iy)y(dx+idy)=\int\limits_L xydx-y^2dy+i\int\limits_L xydy+y^2dx=$$

$$=\int\limits_0^1 (2x^3-4x^4\cdot 4x)dx+i\int\limits_0^1 (2x^3\cdot 4x+4x^4)dx=$$

$$=\left(\frac{x^4}{2}-\frac{8x^6}{3}\right)\Bigg|_0^1+i\left(\frac{8x^5}{5}+\frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{8}{3}+\frac{12}{5}i=-\frac{13}{6}+\frac{12}{5}i.$$

<u>Приклад 2.</u> Обчислити $\int\limits_L z^2\operatorname{Re} zdz,$ якщо L – дуга кола $|z|=2$, для якої $\operatorname{Re} z>0,\quad \operatorname{Im} z<0,$ від точки $z_A=-2i$ до точки $z_B=2$.

Розв’язання. Інтеграл обчислюється вздовж дуги кола $|z|=2$, що знаходиться в четвертій чверті (рис.4).

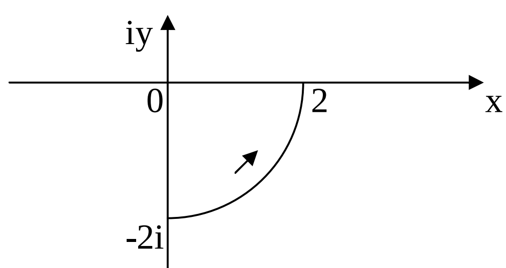

Рис. 4

Виконаємо заміну $z = 2e^{it}, \quad -\frac{p}{2} < t < 0, \quad dz = 2ie^{it}dt.$ Тоді

$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(2e^{it}) = \operatorname{Re} 2(\cos t + i \sin t) = 2\cos t = e^{it} + e^{-it}$, тому

$$\int_L z^2 \operatorname{Re} z dz = \int_{-\frac{p}{2}}^{0} 4e^{2it}(e^{it} + e^{-it}) 2ie^{it} dt = 8i \int_{-\frac{p}{2}}^{0} (e^{4it} + e^{2it}) dt =$$

$$= 8i \left(\frac{e^{4it}}{4i} + \frac{e^{2it}}{2i} \right) \Bigg|_{-\frac{p}{2}}^{0} = 2(e^{4it} + 2e^{2it}) \Big|_{-\frac{p}{2}}^{0} = 2(1 + 2 - e^{-2pi} - 2e^{-pi}) = 8.$$

<u>Приклад 3.</u> Обчислити $\int_L ze^z dz$, де $L -$ відрізок AB від точки $z_A = 1$ до точки $z_B = pi/2$.

Розв’язання. Так як функція ze^z аналітична в усій комплексній площині, то застосуємо формулу Ньютона – Лейбніца. Інтегруючи частинами, маємо $\int_1^{\frac{p}{2}i} ze^z dz = \begin{vmatrix} u = z & dv = e^z dz \\ du = dz & v = e^z \end{vmatrix} = ze^z \Big|_1^{\frac{p}{2}i} - \int_1^{\frac{p}{2}i} e^z dz =$

$$= \frac{p}{2} i e^{\frac{p}{2}i} - e - e^z \Big|_1^{\frac{p}{2}i} = \frac{p}{2} i e^{\frac{p}{2}i} - e - e^{\frac{p}{2}i} + e = \left(\frac{p}{2} i - 1 \right) e^{\frac{p}{2}i} =$$

$$= \left(\frac{p}{2} i - 1 \right) \left(\cos\frac{p}{2} + i \sin\frac{p}{2} \right) = \left(\frac{p}{2} i - 1 \right) i = -\frac{p}{2} - i.$$

§6. ІНТЕГРАЛЬНА ФОРМУЛА КОШІ

<u>*Означення 1.*</u> Область D називається **однозв’язною**, якщо для довільного простого кусково-гладкого замкнутого контура, що належить області D, всі точки, які лежать всередині контура, також належать області D. В протилежному випадку область називається **многозв’язною**.

Інтеграл вздовж замкнутого контура C позначатимемо $\oint\limits_C f(z)\,dz$ і вважатимемо, що інтегрування ведеться в додатному напрямі (область, обмежена контуром, при обході залишається зліва). Такі інтеграли мають ряд цікавих властивостей.

Теорема 1 (**Інтегральна теорема Коші**). Якщо G – однозв'язна область площини і $f(z)$ – однозначна аналітична функція в області G, то $\oint\limits_C f(z)\,dz = 0$ для довільного кусково-гладкого замкнутого контура $C \subset G$.

З теореми 1 слідує, наприклад, що $\oint\limits_C (z - z_0)^n\,dz = 0$ при $n \ge 0$ для довільного кусково-гладкого замкнутого контура C; або $\oint\limits_{|z+2|=1} \frac{e^z}{z}\,dz = 0$, так як підінтегральна функція аналітична в області, що містить контур.

Наслідок. Якщо $f(z)$ – аналітична функція в однозв'язній області G, то $\int\limits_{AB} f(z)\,dz$ вздовж довільної кусково-гладкої кривої AB, яка належить області G, не залежить від форми кривої, а залежить лише від вибору точок A і B.

Теорему1 можна узагальнити на випадок многозв'язної облсті.

Теорема 2. Нехай $f(z)$ – аналітична функція в многозв'язній області G та на її межі, що складається з простих кусково-гладких замкнутих контурів Γ, g_1, g_2,..., g_n, причому g_1, g_2, ..., g_n знаходяться всередині Γ і не мають спільних внутрішніх точок. Тоді

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \oint\limits_{g_1} f(z)\,dz + \oint\limits_{g_2} f(z)\,dz + \ldots + \oint\limits_{g_n} f(z)\,dz,$$

де інтегрування ведеться в додатному напрямі.

Теорема 3. Нехай функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області G і простий, кусково-гладкий контур C, що обмежує область D, лежить в області $G.$ Тоді для довільної точки $z_0 \in D$ справедлива формула

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0), \tag{1}$$

яку називають **інтегральною формулою Коші**.

Теорема 4. Нехай функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області G і $C-$простий, кусково-гладкий контур, що обмежує область D і лежить в області $G.$ Тоді для довільного $z_0 \in D$ функція $f(z)$ має в точці z_0 похідні всіх порядків і справедливе твердження

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad n = 0,1,2,..., \tag{2}$$

яке називають **інтегральною формулою Коші для похідної**.

Приклад 1. Обчислити $\oint_C \frac{dz}{(z-1)(z-2)}$, якщо: $1)C:|z| = \frac{1}{2};$

$2)C:|z| = \frac{3}{2};\quad 3)C:|z| = 3.$

Розв'язання. 1) Так як точки $z = 1$ і $z = 2$ лежать поза контуром $|z| = \frac{1}{2}$, то функція $\frac{1}{(z-1)(z-2)}-$ аналітична в області $|z| \le \frac{1}{2}$ і за теоремою 1 $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(z-1)(z-2)} = 0.$

2) Всередині контура $|z| = \frac{3}{2}$ лежить точка $z_0 = 1$, а функція $\frac{1}{z-2}-$аналітична в області, що містить контур. Тому за формулою (1)

$$\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z-1)(z-2)} = 2\pi i \left.\frac{1}{z-2}\right|_{z=1} = -2\pi i.$$

3) Точки $z=1$ і $z=2$ лежать всередині контура $|z|=3$. Побудуємо контури γ_1 і γ_2, які знаходяться в контурі C, не перетинаються і кожен з контурів містить одну з точок $z=1$, $z=2$ (рис.5).

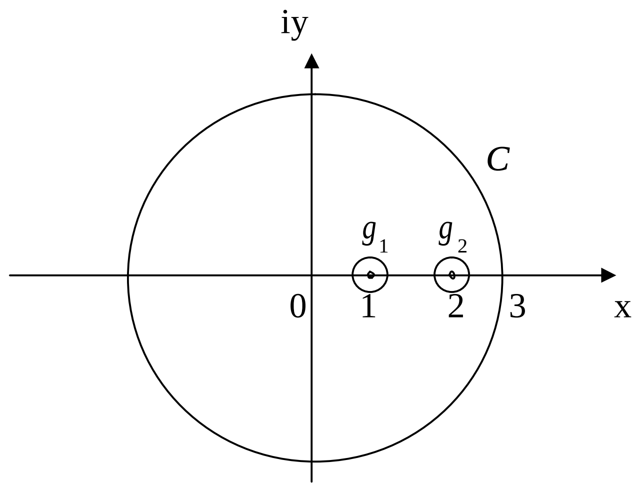

Рис. 5

За теоремою 2 та формулою (1) маємо: $\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)(z-2)} =$

$$= \oint\limits_{\gamma_1} \frac{\frac{1}{z-2}}{z-1} dz + \oint\limits_{\gamma_2} \frac{\frac{1}{z-1}}{z-2} dz = 2\pi i \left.\frac{1}{z-2}\right|_{z=1} + 2\pi i \left.\frac{1}{z-1}\right|_{z=2} = = -2\pi i + 2\pi i = 0.$$

<u>Приклад 2.</u> Обчислити $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz.$

Розв’язання. Точка $z_0 = 0$ лежить всередині контура $|z|=1$, а $\cos z -$ аналітична функція в комплексній площині. Використаємо формулу (2) з $n=2$:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}(\cos z)''\Big|_{z=0} = \pi i(-\sin z)'\Big|_{z=0} = \pi i(-\cos z)\Big|_{z=0} = -\pi i.$$

§7. РОЗКЛАД АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ В СТЕПЕНЕВИЙ РЯД. РЯД ЛОРАНА

Нехай функція $f(z)$ є сумою степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ в крузі $\left|z-z_0\right| < R, \quad R>0.$ Тоді кажуть, що $f(z)$ **розкладена в степеневий ряд** в околі точки z_0 або по степенях $z-z_0$. Наведемо умови, при яких функція може бути розкладена в степеневий ряд.

<u>Теорема 1.</u> Якщо функція $f(z)$ аналітична в крузі $\left|z-z_0\right| < R,$ $R>0,$ то $f(z)$ може бути представлена єдиним чином у вигляді суми ряду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \tag{1}$$

де коефіцієнти ряду визначаються за формулою

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(V)}{(V-z_0)^{n+1}}dV, \tag{2}$$

$\Gamma -$ коло $\left|z-z_0\right| = R', \quad R' < R.$

Ряд (1) з заданими формулою (2) коефіцієнтами називається **рядом Тейлора** функції $f(z)$ в околі точки z_0.

Той факт, що сума степеневого ряду теж є аналітичною функцією в крузі збіжності, приводить до наступного критерію: функція $f(z)$

аналітична в крузі $|z-z_0|<R$ тоді і тільки тоді, коли $f(z)$ є сумою степеневого ряду в даному крузі.

Приклад 1. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Тейлора в околі точки $z_0=0$ та знайти круг збіжності ряду: 1) $f(z)=\cos^2 z$; 2) $f(z)=\dfrac{2z-7}{z^2-7z+12}$.

Розв'язання. 1) Використаємо формулу пониження степеня $\cos^2 z=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2z)$ і відомий розклад в ряд $\cos z=1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-...+$ $+(-1)^n\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}+...,\quad z\in K.$ Тоді $\cos^2 z=\dfrac{1}{2}\left(2-\dfrac{4z^2}{2!}+\dfrac{16z^4}{4!}-...+\right.$

$$\left.+(-1)^n\frac{2^{2n}z^{2n}}{(2n)!}+...\right)=1-z^2+\frac{z^4}{3}-...+(-1)^n\frac{2^{2n-1}z^{2n}}{(2n)!}+...,\quad z\in K.$$

2) Розкладемо функцію на суму простих дробів.

$$\frac{2z-7}{z^2-7z+12}=\frac{2z-7}{(z-3)(z-4)}=\frac{\mathrm{A}}{z-3}+\frac{\mathrm{B}}{z-4},$$

$$2z-7=\mathrm{A}(z-4)+\mathrm{B}(z-3),$$

$$\begin{array}{l|l} z=3 & -1=-\mathrm{A}\Rightarrow \mathrm{A}=1 \\ z=4 & \quad 1=\mathrm{B}, \end{array}$$

тобто $\dfrac{2z-7}{(z-3)(z-4)}=\dfrac{1}{z-3}+\dfrac{1}{z-4}$. Кожен із простих дробів розкладемо в степеневий ряд, як суму членів збіжної геометричної прогресії $\dfrac{a}{1-q}=a\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n,\quad |q|<1.$ А саме, $f(z)=\dfrac{1}{z-3}+\dfrac{1}{z-4}=-\dfrac{1}{3\left(1-\dfrac{z}{3}\right)}-\dfrac{1}{4\left(1-\dfrac{z}{4}\right)}=$

$=-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^n}-\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{4^n}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3^{n+1}}+\dfrac{1}{4^{n+1}}\right)z^n$ при $\left|\dfrac{z}{3}\right|<1$ і $\left|\dfrac{z}{4}\right|<1$. Одержаний ряд має круг збіжності $|z|<3$.

<u>Означення 1.</u> **Рядом Лорана** називається вираз вигляду

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \qquad (3)$$

де z – комплексна змінна, z_0, a_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ – константи.

За означенням вважаємо ряд (3) сумою двох рядів:

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Ряд $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-z_0)^n$ називається **головною частиною** ряду Лорана, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ – **правильною частиною**. Для правильної частини ряду Лорана існує круг збіжності $|z-z_0| < R, \quad 0 \le R \le \infty,$ в якому сума ряду є аналітичною функцією. Перетворимо головну частину ряду Лорана:

$\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-z_0)^n = \left| \frac{1}{z-z_0} = t \right| = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n t^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} t^n.$ Існує число $R_1, 0 \le R_1 \le \infty$, таке, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} t^n$ збіжний в крузі $|t| < R_1$ і його сума є аналітичною функцією в цьому крузі. А значить, ряд $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-z_0)^n$ збіжний при $\frac{1}{|z-z_0|} < R_1$, або $|z-z_0| > \frac{1}{R_1} = r$, і його сума є аналітична функція в цій області.

Якщо $r \ge R$, то у головної і правильної частини ряду Лорана немає спільної області збіжності. Якщо $r < R$, то ряд (3) є збіжним у кільці $r < |z-z_0| < R$, а його сума є аналітичною функцією в даному кільці.

Наступна теорема визначає умови, при яких функція $f(z)$ розкладається в ряд Лорана по степенях $z - z_0$.

<u>Теорема 2.</u> (**Лорана**) Якщо функція $f(z)$ аналітична в кільці $r < \left| z - z_0 \right| < R, \quad 0 \le r, R \le \infty,$ то вона в цьому кільці єдиним чином може бути представлена сумою ряду Лорана $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$

де коефіцієнти ряду визначаються за формулою

$$a_n = \frac{1}{2p\,i} \oint\limits_{\Gamma_{R'}} \frac{f(V)}{(V - z_0)^{n+1}} dV, \tag{4}$$

$\Gamma_{R'}$ – коло $\left| z - z_0 \right| = R', \quad r < R' < R.$

<u>Приклад 2.</u> Розкласти в ряд Лорана по степенях z функцію:

1) $\dfrac{\sin z}{z^4}$; 2) $e^{\frac{1}{z^2}}$.

Розв’язання. 1) Так як $\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$

$z \in K,$ то $\dfrac{\sin z}{z^4} = \dfrac{1}{z^3} - \dfrac{1}{3!z} + \dfrac{z}{5!} - \dfrac{z^3}{7!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{z^{2n-3}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad z \ne 0.$

2) Використаємо відомий розклад в ряд функції

$e^z = 1 + \dfrac{z}{1!} + \dfrac{z^2}{2!} + \ldots + \dfrac{z^n}{n!} + \ldots, \quad z \in K.$ Тоді

$$e^{\frac{1}{z^2}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^4} + \ldots + \frac{1}{n!z^{2n}} + \ldots, \quad z \ne 0.$$

<u>Приклад 3.</u> Для функції $f(z) = \dfrac{5z+1}{z^2 + z - 2}$ записати всі можливі розклади в ряд Лорана по степенях $z - 2$.

Розв'язання. Розкладемо функцію $f(z)$ на суму простих дробів.

$$\frac{5z+1}{z^2+z-2}=\frac{5z+1}{(z-1)(z+2)}=\frac{\mathrm{A}}{z-1}+\frac{\mathrm{B}}{z+2};$$

$$5z+1=\mathrm{A}(z+2)+\mathrm{B}(z-1);$$

$$\begin{array}{r|l} z=1 & 3\mathrm{A}=6; \quad \mathrm{A}=2 \\ z=-2 & -3\mathrm{B}=-9; \quad \mathrm{B}=3 \end{array}$$

Значить, $f(z)=\dfrac{2}{z-1}+\dfrac{3}{z+2}$. Функція не існує в точках $z=1$, $z=-2$ і, за умовою задачі, $z_0=2$. Тому є три області, де функція $f(z)$ може бути розкладена в ряд Лорана (рис.6).

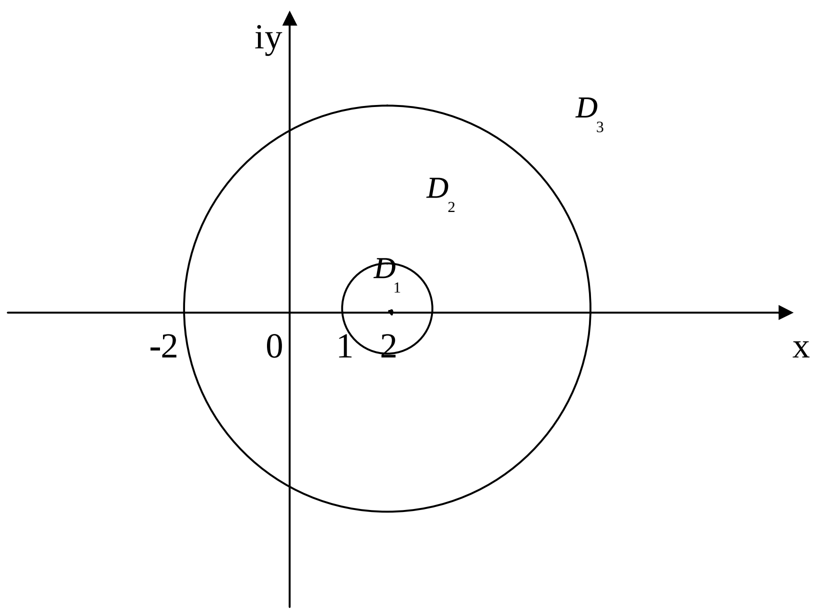

Рис. 6

Розглянемо кожен з трьох випадків.

а) В області $D_1: |z-2|<1$ ряд Лорана співпадає з рядом Тейлора для функції $f(z)$. Маємо (враховуючи, що $\dfrac{a}{1-q}=a\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$, $|q|<1$)

$$f(z)=\frac{2}{z-1}+\frac{3}{z+2}=\frac{2}{(z-2)+1}+\frac{3}{(z-2)+4}=\frac{2}{1-(-(z-2))}+\frac{3}{4(1-\left(-\frac{z-2}{4}\right))}=$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(-(z-2))^n+\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{4}\right)^n=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n+3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{4^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(2+\frac{3}{4^{n+1}}\right)(z-2)^n \qquad \text{при} \quad |z-2|<1.$$

б) Область D_2 $-$кільце $1<|z-2|<4$, тому ряд Лорана містить і головну, і правильну частини. Доданок $\frac{2}{z-1}$, який є аналітичною функцією при $|z-2|>1$, розкладається в головну частину, а доданок $\frac{3}{z+2}$, що є аналітичною функцією в крузі $|z-2|<4,-$в правильну частину ряду Лорана. Одержимо

$$f(z)=\frac{2}{(z-2)+1}+\frac{3}{(z-2)+4}=\frac{2}{(z-2)\left(1+\frac{1}{z-2}\right)}+\frac{3}{4\left(1+\frac{z-2}{4}\right)}=$$

$$=\frac{2}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}+\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{4^n}=$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}+3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-2)^n \qquad \text{при} \quad 1<|z-2|<4.$$

в) В області $D_3:|z-2|>4$ ряд Лорана містить лише головну частину і має вигляд

$$f(z)=\frac{2}{(z-2)+1}+\frac{3}{(z-2)+4}=\frac{2}{(z-2)\left(1+\frac{1}{z-2}\right)}+\frac{3}{(z-2)\left(1+\frac{4}{z-2}\right)}=$$

$$=\frac{2}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}+\frac{3}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(z-2)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2+3\cdot 4^n)}{(z-2)^{n+1}}.$$

§8. НУЛІ ТА ІЗОЛЬОВАНІ ОСОБЛИВІ ТОЧКИ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Означення 1. Точка z_0 називається **нулем** функції $f(z)$, якщо $f(z_0)=0.$

Теорема 1. Якщо z_0 – нуль аналітичної функції $f(z)$, то існує окіл точки z_0 такий, що $f(z)=(z-z_0)^m j(z), \quad m\in N, \quad j(z_0)\neq 0$ і $j(z)$ аналітична в даному околі. При цьому $f(z_0)=f'(z_0)=...=f^{(m-1)}(z_0)=0,$ $f^{(m)}(z_0)\neq 0.$

Число m називають **кратністю** нуля z_0. Нуль першої кратності називається **простим**.

Приклад 1. Знайти нулі функції $\sin z$ та визначити їх кратність.

Розв’язання. Якщо $\sin z=0$, то $z_k=pk, \quad k\in Z.$ Похідна $(\sin z)'=\cos z$ в точках pk дорівнює $(-1)^k\neq 0.$ Отже, точки $z_k=pk, \quad k\in Z,$ для функції $\sin z$ є простими нулями.

Приклад 2. Визначити кратність нуля $z=0$ для функції $f(z)=1-\dfrac{z^2}{2}-\cos z.$

Розв’язання.1-й спосіб.Оскільки $f(0)=0,\ f'(0)=\left(-z+\sin z\right)\Big|_{z=0}=0,$ $f''(0)=\left(\cos z-1\right)\Big|_{z=0}=0, \quad f'''(0)=-\sin z\Big|_{z=0}=0, \quad f^{IV}(0)=-\cos z\Big|_{z=0}=-1\neq 0,$ то точка $z=0$ є нулем 4-ї кратності для функції $f(z)$.

2-й спосіб. Розкладемо $f(z)$ в ряд по степенях z. Маємо

$$f(z)=1-\frac{z^2}{2}-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+...+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+...\right)=-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-...+$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=z^4\left(-\frac{1}{4!}+\frac{z^2}{6!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-4}}{(2n)!}+\ldots\right)=z^4 j(z),$$

де $j(0)\neq 0$ і $j(z)$ аналітична в околі точки $z=0$. За теоремою1 $z=0$ є нулем 4-ї кратності функції $f(z)$.

Нехай z_0 є нулем кратності m_1 для функції $f(z)$ і нулем кратності m_2 для функції $j(z)$. Легко бачити, що z_0 буде нулем кратності m_1+m_2 для функції $f(z)j(z)$ і нулем кратності m_1-m_2 (при $m_1>m_2$) для функції $\dfrac{f(z)}{j(z)}$. Так, для функції $z^4\sin z$ точка $z=0$ є нуль п'ятої кратності, а точки $z_k=pk,\quad k\in Z,\quad k\neq 0,-$ прості нулі.

<u>*Означення 2.*</u> Нехай $f(z)$ задана та аналітична в околі точки z_0, за винятком самої точки z_0. Тоді z_0 називають **ізольованою особливою точкою** функції $f(z)$.

Виділяють три види ізольованих особливих точок: усувна особлива точка, полюс і суттєво особлива точка.

1) Ізольована особлива точка z_0 називається **усувною особливою точкою** функції $f(z)$, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$. Особливість у точці z_0 легко усунути, якщо покласти $f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Якщо z_0- усувна особлива точка функції $f(z)$, то $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, тобто ряд Лорана функції $f(z)$ по степенях $z-z_0$ містить тільки правильну частину.

2) Ізольована особлива точка z_0 називається **полюсом** функції $f(z)$, якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty.$

Теорема 2. Точка z_0 є полюсом функції $f(z)$ тоді і тільки тоді, коли z_0 є нулем функції $j(z)=\dfrac{1}{f(z)}.$

Якщо z_0 – нуль функції $j(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ кратності $m,$ то z_0 називають **полюсом** $m-$**го порядку** функції $f(z).$ В цьому випадку розклад функції в ряд Лорана по степенях $z-z_0$ містить скінченне число членів головної частини, причому $a_{-m}\neq 0.$ Полюс першого порядку називається **простим полюсом.**

3) Ізольована особлива точка z_0 називається **суттєво особливою точкою** функції $f(z),$ якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не існує. Ряд Лорана функції $f(z)$ по степенях $z-z_0$ у випадку суттєво особливої точки z_0 містить нескінченне число членів у головній частині.

Приклад 3. З'ясувати характер особливих точок функції: а) $\dfrac{\sin z}{z};$

б) $\dfrac{e^{z-2}-1}{(z-2)^3(z+1)^5};$ в) $e^{\frac{1}{z+i}}.$

Розв'язання. а) Функція $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ аналітична в усіх точках комплексної площини, крім точки $z_0=0.$ Оскільки $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1,$ то $z_0=0-$усувна особлива точка.

б) Функція $f(z)=\dfrac{e^{z-2}-1}{(z-2)^3(z+1)^5}$ має особливі точки $z_1=2$ і $z_2=-1.$ Розглянемо спочатку функцію $y\,(z)=e^{z-2}-1.$ Так як $y\,(2)=0,\quad y\,'(z)=e^{z-2}$ і $y\,'(2)=1\neq 0,$ то $z=2$ є простим нулем функції $y\,(z).$ Функція $j\,(z)=\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{(z-2)^3(z+1)^5}{e^{z-2}-1}$ має нуль другої кратності $z=2$ і нуль п'ятої кратності $z=-1.$ Тому для функції $f(z)=\dfrac{e^{z-2}-1}{(z-2)^3(z+1)^5}$ точка $z_1=2$ є полюсом 2-го порядку, а точка $z_2=-1$ - полюсом 5-го порядку.

в) Функцію $f(z)=e^{\frac{1}{z+i}},$ яка не існує в точці $z_0=-i,$ розкладемо в ряд Лорана по степенях $z+i$:

$$e^{\frac{1}{z+i}}=1+\frac{1}{z+i}+\frac{1}{2!(z+i)^2}+\frac{1}{3!(z+i)^3}+\ldots+\frac{1}{n!(z+i)^n}+\ldots,\quad z\neq -i.$$

Головна частина ряду Лорана містить нескінченне число членів, тому $z_0=-i$ - суттєво особлива точка функції $f(z).$

§9. ЛИШОК ФУНКЦІЇ. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ З ДОПОМОГОЮ ЛИШКІВ

<u>Означення 1.</u> Нехай функція $f(z)$ аналітична в околі точки $z_0,$ за винятком самої точки z_0. **Лишком** $f(z)$ **в точці** z_0 називається число

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f(z)=\frac{1}{2p\,i}\oint_{\Gamma} f(V)\,dV, \qquad (1)$$

де $\Gamma -$ довільний замкнутий контур, що лежить в околі точки z_0 і містить дану точку.

Припустимо, що $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n.$ За теоремою 2 §7 коефіцієнти ряду Лорана $a_n = \frac{1}{2p\,i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(V)}{(V-z_0)^{n+1}}dV, \quad n=0,\pm1,\pm2,...$

Поклавши $n=-1,$ маємо

$$a_{-1}=\frac{1}{2p\,i}\oint\limits_{\Gamma} f(V)dV=\operatorname*{Res}_{z_0} f(z). \tag{2}$$

В деяких частинних випадках з рівності (2) можна одержати інші формули.

1) Нехай $z_0 -$ усувна особлива точка $f(z).$ Тоді ряд Лорана функції $f(z)$ по степенях $z-z_0$ містить лише правильну частину, тому $\operatorname*{Res}_{z_0} f(z)=a_{-1}=0.$

2) Припустимо, що $z_0 -$ простий полюс функції $f(z).$ Тоді

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+...+a_n\left(z-z_0\right)^n+...,$$

$$f(z)(z-z_0)=a_{-1}+a_0(z-z_0)+a_1(z-z_0)^2+...+a_n\left(z-z_0\right)^{n+1}+... \qquad \text{і}$$

$$a_{-1}=\operatorname*{Res}_{z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0). \tag{3}$$

Зокрема, якщо $f(z)=\frac{j\,(z)}{y\,(z)},$ де $j\,(z), \quad y\,(z)-$ аналітичні в околі точки $z_0, \quad y\,(z_0)=0, \quad y\,'(z_0)\neq 0,$ то

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{j\,(z)}{y\,(z)}(z-z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{j\,(z)}{\frac{y\,(z)-y\,(z_0)}{z-z_0}}=\frac{j\,(z_0)}{y\,'(z_0)}. \tag{4}$$

3) Якщо z_0 – полюс m – го порядку функції $f(z)$, $m>1$, то, аналогічно пункту 2), приходимо до формули

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(f(z)(z-z_0)^m\right). \qquad (5)$$

Приклад 1. Обчислити лишки функції в її особливих точках:

а) $\dfrac{1}{z^4-z^3}$; б) tgz; в) $\sin\dfrac{1}{z}$.

Розв’язання. а) Функція $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z-1)}$ має простий полюс $z=1$ і полюс третього порядку $z=0$. За формулами (3) і (5) обчислюємо:

$$\operatorname*{Res}_{1} f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{1}{z^3(z-1)}(z-1)=1;$$

$$\operatorname*{Res}_{0} f(z) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z^3(z-1)}\cdot z^3\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z-1}\right)''=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(-\frac{1}{(z-1)^2}\right)'=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{2}{(z-1)^3}=-1.$$

б) Нехай $f(z)=tgz$, або $f(z)=\dfrac{\sin z}{\cos z}$. Функція $\cos z$ має прості нулі в точках $z_k=\dfrac{p}{2}+pk$, $k\in Z$, то $f(z)$ має в цих точках прості полюси. Використовуючи формулу (4), знайдемо

$$\operatorname*{Res}_{z_k} f(z) = \left.\frac{\sin z}{-\sin z}\right|_{z=\frac{p}{2}+pk}=-1, \quad k\in Z.$$

в) Для функції $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$ точка $z=0$ є суттєво особливою точкою. Розкладемо $f(z)$ в ряд Лорана по степенях z:

$$\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}}+\ldots,\quad z\neq 0.$$

Тоді $\quad \operatorname*{Res}_{0} f(z)=a_{-1}=1.$

З допомогою лишків обчислюють деякі інтеграли вздовж замкнутого контура.

Теорема 1. (**Основна теорема про лишки**). Нехай $L-$ простий кусково-гладкий замкнутий контур, що обмежує область $D,$ і нехай функція $f(z)$ аналітична на контурі L і в області $D,$ за винятком скінченного числа ізольованих особливих точок $z_1,\ z_2,\ldots,\ z_N,$ які лежать всередині $L.$ Тоді

$$\oint_L f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z_k} f(z). \tag{6}$$

Приклад 2. Обчислити $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{dz}{\sin^2 z}.$

Розв'язання. Функція $\varphi(z)=\sin^2 z$ має нулі в точках $z_k=\pi k,\quad k\in Z.$ З них всередину контура $|z|=2$ потрапляє точка $z=0,$ що є нулем другої кратності: $\varphi(0)=\sin^2 0=0,$ $\varphi'(0)=2\sin z\cos z\big|_{z=0}=0,$ $\varphi''(0)=2\cos 2z\big|_{z=0}=2.$

Отже, точка $z=0$ є полюсом другого порядку функції $f(z)=\dfrac{1}{\sin^2 z}.$ З основної теореми про лишки і формули (5) випливає

$$\oint_{|z|=2}\frac{dz}{\sin^2 z}=2\pi i\operatorname*{Res}_{0}\frac{1}{\sin^2 z}=2\pi i\lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2}{\sin^2 z}\right)'=$$

$$=2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{2z\sin^2 z-2z^2\sin z\cos z}{\sin^4 z}=4\pi i\lim_{z\to 0}\frac{z(\sin z-z\cos z)}{\sin^3 z}=$$

$$=4\pi i\lim_{z\to 0}\frac{\sin z-z\cos z}{z^2}=4\pi i\lim_{z\to 0}\frac{\cos z-\cos z+z\sin z}{2z}=4\pi i\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2}=0.$$

Приклад 3. Обчислити $\oint\limits_{|z|=7} ctgz\,dz.$

Розв'язання. Функція $f(z)=\dfrac{\cos z}{\sin z}$ має прості полюси в точках $z_k=\pi k,\quad k\in Z,$ з яких всередині контура $|z|=7$ знаходяться: $z_1=0,\quad z_2=\pi,\quad z_3=2\pi,\quad z_4=-\pi,\quad z_5=-2\pi.$ Оскільки $\operatorname*{Res}\limits_{z_k} ctgz=\left.\dfrac{\cos z}{(\sin z)'}\right|_{z_k}=1,\quad k\in Z,$ то за теоремою 1 і формулою (4)

$$\oint\limits_{|z|=7} ctgz\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{5}\operatorname*{Res}\limits_{z_k} ctgz=10\pi i.$$

Приклад 4. Обчислити $\oint\limits_{|z+2|=2}(z+1)\cos\dfrac{1}{z+1}dz.$

Розв'язання. Функція $f(z)=(z+1)\cos\dfrac{1}{z+1}$ має суттєво особливу точку $z=-1,$ яка лежить всередині контура $|z+2|=2.$ Розкладемо $f(z)$ в ряд Лорана по степенях $z+1$:

$$(z+1)\cos\frac{1}{z+1}=(z+1)\left(1-\frac{1}{2!(z+1)^2}+\frac{1}{4!(z+1)^4}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!(z+1)^{2n}}+\ldots\right)=$$
$$=(z+1)-\frac{1}{2(z+1)}+\frac{1}{24(z+1)^3}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!(z+1)^{2n-1}}+\ldots$$

За теоремою 1 і формулою (2) знаходимо

$$\oint\limits_{|z+2|=2}(z+1)\cos\frac{1}{z+1}dz=2\pi i\operatorname*{Res}\limits_{-1}(z+1)\cos\frac{1}{z+1}=2\pi i\cdot a_{-1}=2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right)=-\pi i.$$

Наступне твердження дозволяє застосувати лишки до обчислення невласних інтегралів від деяких дробово-раціональних функцій в дійсній області.

<u>Теорема 2.</u> Нехай $f(z)=\dfrac{a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\ldots+b_mz^m}$, де $m\geq n+2,\quad a_n\neq 0,\quad b_m\neq 0,$ і $f(z)$ не має полюсів на дійсній осі. Тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2p\,i\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z_k} f(z), \tag{7}$$

де $z_k,\quad k=1,2,\ldots,N,-$ полюси функції $f(z),$ що лежать в верхній півплощині.

<u>Приклад 5.</u> Обчислити $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)},\quad a>0,\quad b>0.$

Розв'язання. Функція $f(z)=\dfrac{1}{(a^2+z^2)(b^2+z^2)}$ має прості полюси $\pm ai,\quad \pm bi.$ У верхній півплощині знаходяться точки $ai,\quad bi.$ Знаходимо лишки функції $f(z)$ в цих точках:

$$\operatorname*{Res}_{ai} f(z)=\lim_{z\to ai}\frac{z-ai}{(a^2+z^2)(b^2+z^2)}=\lim_{z\to ai}\frac{1}{\left(z+ai\right)\left(b^2+z^2\right)}=\frac{1}{2ai(b^2-a^2)};$$

$$\operatorname*{Res}_{bi} f(z)=\lim_{z\to bi}\frac{z-bi}{(a^2+z^2)(b^2+z^2)}=\lim_{z\to bi}\frac{1}{\left(a^2+z^2\right)\left(z+bi\right)}=\frac{1}{2bi(a^2-b^2)}.$$

За формулою (7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}=2p\,i\left(\operatorname*{Res}_{ai} f\left(z\right)+\operatorname*{Res}_{bi} f\left(z\right)\right)=$

$$=2p\,i\left(\frac{1}{2ai(b^2-a^2)}+\frac{1}{2bi(a^2-b^2)}\right)=2p\,i\frac{b-a}{2abi(b^2-a^2)}=\frac{p}{ab(a+b)}.$$

§10. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

<u>Означення 1.</u> **Оригіналом** називається функція $f(t)=u(t)+iv(t)$ дійсної змінної t, що задовольняє умовам:

1) $f(t)-$ однозначна, кусково-неперервна функція разом зі своїми похідними для довільного t;

2) $f(t)=0$ при $t<0$;

3) існують числа $M>0, \quad s>0$ такі, що $|f(t)|\leq Me^{st}$ при всіх $t>0$.

Число $s_0=\inf\{s\}$ називається показником росту функції $f(t)$.

Наприклад, **одинична функція Хевісайда**

$$h(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0;\\ 0, & t<0;\end{cases}$$

є функцією-оригіналом з $M=1$ і $s_0=0$. Функція $f(t)=\sin t$ не є функцією-оригіналом (не виконується умова 2), але $f(t)=\sin t h(t)-$ функція-оригінал з $M=1, \quad s_0=0$.

<u>Означення 2.</u> **Перетворенням Лапласа** (**зображенням**) функції-оригінала $f(t)$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p=s+is$

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt.$$

Той факт, що $F(p)$ є зображенням оригінала $f(t)$, позначатимемо: $f(z) \risingdotseq F(p)$ або $F(p) \risingdotseq f(t)$.

<u>Приклад 1.</u> Знайти, виходячи з означення, зображення функції $e^{at}h(t)$.

Розв'язання. Функція $f(t)=e^{at}h(t)=\begin{cases} e^{at}, & t\geq 0; \\ 0, & t<0; \end{cases}$ є функцією-оригіналом з показником росту $s_0=\operatorname{Re}a$. За означенням 2

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{at}dt=\int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t}dt=\frac{1}{a-p}e^{-(p-a)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p-a},\quad \text{якщо}$$

$\operatorname{Re}(p-a)>0$, тобто $\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}a$.

Отже, $e^{at}h(t)\risingdotseq\dfrac{1}{p-a}$ за умови $\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}a$. Зокрема, при $a=0$ маємо: $h(t)\risingdotseq\dfrac{1}{p}$ при $\operatorname{Re}p>0$. Множник $h(t)$ в таких записах прийнято опускати, тобто пишемо $e^{at}\risingdotseq\dfrac{1}{p-a}$ і $1\risingdotseq\dfrac{1}{p}$ (маючи на увазі $e^{at}h(t)$ і $h(t)$).

Перетворення Лапласа має наступні властивості.

1) **Теорема існування зображення**.

Якщо $f(t)-$ оригінал з показником росту s_0, то $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt$ є абсолютно збіжним в півплощині $\operatorname{Re}p>s_0$.

2) **Теорема єдиності**.

Якщо $f(t)\risingdotseq F(p),\ g(t)\risingdotseq F(p)$, то $f(t)\equiv g(t)$.

3) **Теорема лінійності**.

Нехай $f(t)\risingdotseq F(p),\quad g(t)\risingdotseq G(p),\quad A,B-$ довільні числа. Тоді $Af(t)+Bg(t)\risingdotseq AF(p)+BG(p)$.

4) **Теорема подібності**.

Якщо $f(t)\risingdotseq F(p)$, то для довільного $l>0$: $f(tl)\risingdotseq\dfrac{1}{l}F\left(\dfrac{p}{l}\right)$.

5) **Теорема зміщення (затухання)**.

Якщо $f(t) \risingdotseq F(p)$, a – довільне число, то $e^{at} f(t) \risingdotseq F(p-a)$.

6) **Теорема запізнення**.

Нехай $f(t) \risingdotseq F(p)$ і $t > 0$. Тоді $f(t-t) \risingdotseq e^{-pt} F(p)$.

7) **Теорема диференціювання оригіналу**.

Припустимо, що оригінал $f(t)$ має похідні всіх порядків, які теж є оригіналами, причому $f(0) = \lim\limits_{t \to +0} f(t)$, $f'(0) = \lim\limits_{t \to +0} f'(t), \ldots$, і $f(t) \risingdotseq F(p)$.

Тоді $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$, $f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0), \ldots$,

$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$.

8) **Теорема диференціювання зображення**.

Якщо $f(t)$ – оригінал з показником росту s_0, $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $F(p)$ – аналітична функція в півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$ і $-tf(t) \risingdotseq F'(p)$.

9) **Теорема інтегрування оригіналу**.

Якщо $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\int\limits_0^t f(t)dt \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$.

10) **Теорема інтегрування зображення**.

Нехай $f(t) \risingdotseq F(p)$ і $\int\limits_p^\infty F(z)dz$ – збіжний. Тоді $\dfrac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty F(z)dz$.

Відомі зображення функцій e^{at}, 1 ,та властивості перетворення Лапласа дозволяють знайти зображення деяких інших функцій. Наприклад,

$\sin t = \dfrac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) \risingdotseq \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{p-i} - \dfrac{1}{p+i}\right) = \dfrac{1}{p^2+1}$ (пишучи $\sin t$, маємо на увазі функцію-оригінал $\sin t h(t)$). За теоремою подібності

$$\sin at \risingdotseq \frac{1}{a}\frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1}=\frac{a}{p^2+a^2}, \quad a>0,$$ а за теоремою зміщення

$$e^{at}\sin at \risingdotseq \frac{a}{(p-a)^2+a^2}.$$

Аналогічно одержимо: $e^{at}\cos at \risingdotseq \dfrac{p-a}{(p-a)^2+a^2}$,

$$e^{at}sh\,at \risingdotseq \frac{a}{(p-a)^2-a^2}, \qquad e^{at}ch\,at \risingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2-a^2}, \quad a>0.$$

Оскільки $1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$, то $-t \risingdotseq \left(\dfrac{1}{p}\right)' = -\dfrac{1}{p^2}$ (за теоремою диференціювання зображення), тому $t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2}$.

Далі $t^2 \risingdotseq \dfrac{2}{p^3}$, $t^3 \risingdotseq \dfrac{2\cdot 3}{p^4}$,..., $t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

Аналогічно, $-t\sin at \risingdotseq \left(\dfrac{a}{p^2+a^2}\right)' = \dfrac{-2pa}{(p^2+a^2)^2}$, отже,

$$t\sin at \risingdotseq \frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}, \quad a>0,$$ і , аналогічно,

$$-t\cos at \risingdotseq \left(\frac{p}{p^2+a^2}\right)' = \frac{p^2+a^2-2p^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2},$$ тому отримуємо

$$t\cos at \risingdotseq \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}, \quad a>0.$$

Знайдені зображення запишемо в таблицю:

$f(t)$	$F(p)$	$f(t)$	$F(p)$
1	$\frac{1}{p}$	$e^{at}\sin at$	$\frac{a}{(p-a)^2+a^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{at}\cos at$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+a^2}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$e^{at} sh at$	$\frac{a}{(p-a)^2-a^2}$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$e^{at} ch at$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-a^2}$
$sh at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$t\sin at$	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$
$ch at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$t\cos at$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$

Перетворення Лапласа дозволяє спростити розв’язання диференціальних рівнянь, систем диференціальних рівнянь, інтегральних рівнянь та інших задач. Під **операційним численням** розуміють методи розв’язання задач, що містять наступні етапи:

1) від шуканих функцій переходимо до їх зображень;
2) над зображенням виконуємо дії, які відповідають заданим діям над функціями;
3) отримавши результат, повертаємось до початкових функцій – оригіналів.

Для знаходження оригіналу $f(t)$ за відомим зображенням $F(p)$ або розкладаємо $F(p)$ на суму простих дробів і для кожного дробу за таблицею визначаємо оригінал, або використовуємо наступну теорему.

<u>Теорема</u> (**розкладу**). Нехай $F(p)$ – правильний раціональний дріб і $F(p) \risingdotseq f(t)$. Тоді $f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p_k}(F(p)e^{pt})$, де p_k, $k=1,2,...,n,$ – полюси функції $F(p)$.

<u>Приклад 2.</u> Знайти розв'язок диференціального рівняння $x''+2x'+5x=3$ при заданих початкових умовах: $x(0)=1,\quad x'(0)=0.$

Розв'язання. Припустимо, що $x(t) \risingdotseq F(p)$, де $x(t)$ – шукана функція. За теоремою диференціювання оригінала

$$x'(t) \risingdotseq pF(p)-x(0)=pF(p)-1,$$

$$x''(t) \risingdotseq p^2F(p)-px(0)-x'(0)=p^2F(p)-p.$$

Права частина рівняння $3 \risingdotseq \frac{3}{p}$. Підставляючи замість кожної функції в рівнянні її зображення, переходимо від диференціального до алгебраїчного рівняння відносно $F(p)$:

$$p^2F(p)-p+2pF(p)-2+5F(p)=\frac{3}{p},$$

$$F(p)(p^2+2p+5)=\frac{3}{p}+p+2,\quad F(p)=\frac{p^2+2p+3}{p(p^2+2p+5)}.$$

Розкладемо $F(p)$ на суму простих дробів:

$$\frac{p^2+2p+3}{p(p^2+2p+5)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+5};$$

$$p^2+2p+3=A(p^2+2p+5)+p(Bp+C);$$

$$\begin{array}{r|ll} p=0 & 5A=3, & A=3/5, \\ p^2 & A+B=1, & B=1-A=2/5, \\ p & 2A+C=2, & C=2-2A=4/5. \end{array}$$

$$F(p)=\frac{3}{5p}+\frac{\frac{2}{5}p+\frac{4}{5}}{p^2+2p+5}=\frac{3}{5p}+\frac{2}{5}\cdot\frac{p+2}{(p+1)^2+4}=$$

$$=\frac{3}{5p}+\frac{2}{5}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{(p+1)^2+2^2}.$$

За таблицею для кожного з зображень знаходимо оригінал.

$$x(t)=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{5}e^{-t}\sin 2t.$$

Приклад 3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах:

$$\begin{cases} x'+2x-y=2; \\ y'-3x=0; \end{cases} \quad x(0)=1, \quad y(0)=0. \tag{1}$$

Розв'язання. Покладемо $x(t)\doteqdot F(p), \quad y(t)\doteqdot G(p),$ де $x(t), \quad y(t)-$ шукані функції. За теоремою диференціювання оригінала $x'(t)\doteqdot pF(p)-1, \quad y'(t)\doteqdot pG(p).$ Заміняючи кожну функцію рівнянь системи її зображенням, приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} pF(p)-1+2F(p)-G(p)=\dfrac{2}{p}; \\ pG(p)-3F(p)=0; \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (p+2)F(p)-G(p)=\dfrac{p+2}{p}; \\ 3F(p)-pG(p)=0. \end{cases} \tag{2}$$

За теоремою Крамера знаходимо розв'язок системи (2):

$$\Delta=\begin{vmatrix} p+2 & -1 \\ 3 & -p \end{vmatrix}=-p^2-2p+3;\quad \Delta_1=\begin{vmatrix} \frac{p+2}{p} & -1 \\ 0 & -p \end{vmatrix}=-p-2;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} p+2 & \frac{p+2}{p} \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-\frac{3(p+2)}{p};$$

$$F(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{p+2}{p^2+2p-3}=\frac{p+2}{(p-1)(p+3)};$$

$$G(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{3(p+2)}{p^3+2p^2-3p}=\frac{3(p+2)}{p(p-1)(p+3)}.$$

Оригінали $x(t)$, $y(t)$ зображень $F(p)$, $G(p)$ знайдемо за теоремою розкладу, обчислюючи лишки в простих полюсах функцій $F(p)e^{pt}$, $G(p)e^{pt}$ за формулою (4) §9.

$$x(t)=\operatorname*{Res}_{1}F(p)e^{pt}+\operatorname*{Res}_{-3}F(p)e^{pt}=\left.\frac{(p+2)e^{pt}}{2p+2}\right|_{p=1}+\left.\frac{(p+2)e^{pt}}{2p+2}\right|_{p=-3}=$$

$$=\frac{3}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-3t};$$

$$y(t)=\operatorname*{Res}_{0}G(p)e^{pt}+\operatorname*{Res}_{1}G(p)e^{pt}+\operatorname*{Res}_{-3}G(p)e^{pt}=\left.\frac{3(p+2)e^{pt}}{3p^2+4p-3}\right|_{p=0}+$$

$$+\left.\frac{3(p+2)e^{pt}}{3p^2+4p-3}\right|_{p=1}+\left.\frac{3(p+2)e^{pt}}{3p^2+4p-3}\right|_{p=-3}=-2+\frac{9}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-3t}.$$

Отже, розв'язком системи диференціальних рівнянь (1) є функції

$$x(t)=\frac{1}{4}(3e^{t}+e^{-3t});\quad y(t)=\frac{1}{4}(9e^{t}-e^{-3t}-8).$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

I. Обчислити

1) $(1+i)^{15}$

2) $\sqrt[4]{1}$

3) $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{50}$

4) $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$

5) $(1-i)^{21}$

6) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

7) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{12}$

8) $\sqrt[3]{-i}$

9) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{40}$

10) $\sqrt[4]{-1}$

11) $(i-1)^{19}$

12) $\sqrt{i}$

13) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{10}$

14) $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$

15) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{9}$

16) $\sqrt[3]{1}$

17) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^{8}$

18) $\sqrt[3]{-27i}$

19) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100}$

20) $\sqrt{-i}$

21) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{85}$

22) $\sqrt[3]{-1}$

23) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{45}$

24) $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$

25) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{55}$

26) $\sqrt[6]{1}$

27) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{90}$

28) $\sqrt[4]{4\sqrt{3}i-4}$

29) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{61}$

30) $\sqrt[6]{-64}$

II. Зобразити на комплексній площоні множину точок, що задовольняє умові

1) $|z-1+2i|=3$

2) $|z-1|<|z-i|$

3) $|z+i|\le 2$

4) $|z-i|+|z+i|=4$

5) $1\le|z+2|\le 2$

6) $|\overline{z}|=\operatorname{Re}z+1$

7) $|z+2-3i|\le 1$

8) $\operatorname{Im}z\ge\operatorname{Re}z-2$

9) $|z+2i|>3$

10) $|z+2i|<2|z-1|$

11) $|z+2-i|\ge 1$

12) $\operatorname{Im}z+2>|z|$

13) $2<|z-i|<3$

14) $|z|+|z-2|=6$

15) $\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}\overline{z}>1$

16) $|z+3-4i|=2$

17) $\operatorname{Re}z^2=2$

18) $\frac{p}{4}<\arg z<\frac{3p}{4}$

19) $z\overline{z}+z+\overline{z}=0$

20) $1\le|z-2+i|\le 3$

21) $\operatorname{Im}\overline{z}^2=2$

22) $\operatorname{Re}z^2+z\overline{z}>2\operatorname{Im}z$

23) $\operatorname{Im}z^2=4$

24) $|z+2|>|z+i|$

25) $\overline{z}^2+z^2=4$

26) $z\overline{z}+\operatorname{Im}z>0$

27) $\operatorname{Re}\overline{z}^2>0$

28) $-\frac{p}{3}\le\arg z\le\frac{p}{6}$

29) $2<z\overline{z}<3$

30) $\operatorname{Re}z+3>|z|$

III. Перевірити, чи є аналітичною задана функція. У випадку позитивної відповіді знайти похідну функції.

1) $z|z|$
2) e^z
3) $ze^{i\,\mathrm{Im}\,z}$
4) $\bar{z}\,\mathrm{Re}\,z^2$
5) $\cos z$
6) $|z|\,\mathrm{Re}\,z$
7) $z\,\mathrm{Im}\,\bar{z}^2$
8) shz
9) $\bar{z}\,\mathrm{Im}\,z$
10) $z^2\bar{z}$
11) chz
12) $z\,\mathrm{Re}\,z^3$
13) $ze^{\mathrm{Re}\,z}$
14) e^{z^2}
15) $z^2\,\mathrm{Im}\,\bar{z}$
16) $z^2+2\bar{z}$
17) z^3+z^2
18) $\bar{z}\,\mathrm{Im}\,z^3$
19) $z^3\,\mathrm{Im}\,\bar{z}$
20) $\frac{1}{z}$
21) $\bar{z}e^{i\,\mathrm{Re}\,z}$
22) $\bar{z}\,\mathrm{Re}\,z$
23) ze^z
24) $(z+3)\,\mathrm{Im}\,z^2$
25) $z^2\,\mathrm{Im}(z-i)$
26) $\cos 3z+i$
27) $\bar{z}\,\mathrm{Re}\,z^3$
28) $z^3\bar{z}$
29) $\sin 5z-i$
30) $\bar{z}chz$

IV. Відновити аналітичну в околі точки z_0 функцію $f(z)$ за її відомою дійсною $u(x;y)$ чи уявною $v(x;y)$ частиною і значенням $f(z_0)$

1) $u = x^2 - y^2 + 2x, \quad f(i) = 2i - 1$

2) $v = 2(chx\sin y - xy), \quad f(0) = 0$

3) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, \quad f(p) = \dfrac{1}{p}$

4) $v = -2\sin 2xsh2y + y, \quad f(0) = 2$

5) $u = 2\sin xchy - x, \quad f(0) = 0$

6) $v = \dfrac{y}{x^2 + y^2}, \quad f(2) = 0$

7) $u = x^3 - 3xy^2 + 2x + 1, \quad f(0) = 0$

8) $v = 2(2shx\sin y + xy), \quad f(0) = 3$

9) $u = e^x(x\cos y - y\sin y), \quad f(0) = 0$

10) $v = 2\cos xchy - x^2 + y^2, \; f(0) = 2$

11) $u = 3(x^2 - y^2) - 2x + 1, \quad f(0) = 0$

12) $v = y^2 - x^2 + y, \quad f(1) = 2 - i$

13) $u = e^{-x}\sin y + x, \quad f(0) = i$

14) $v = -2xy - 2x, \quad f(-i) = 0$

15) $u = 2e^x\sin y, \quad f(0) = i$.

Обчислити

16) $Ln\left(-1\right)$

17) $i^{\frac{1}{i}}$

18) Lni

19) $(-1)^{\sqrt{2}}$

20) $Ln(-1-i)$

21) 1^{i}

22) Lni^{i}

23) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$

24) $Ln(-i)$

25) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)^{1+i}$

26) $Ln(1-i)$

27) $(1-i)^{3-3i}$

28) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{i-1}$

29) $i^{\sqrt{2}}$

30) $(1+i)^{i}$.

V. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної вздовж заданої кривої

1) $\int\limits_{AB} \mathrm{Re}\, z dz, \quad AB: y = 3x^2, \quad z_A = 0, \quad z_B = 1+3i$

2) $\int\limits_{ABC} (z^2 + z)dz, \quad ABC -$ламана, $z_A = -2, \quad z_B = 2i, \quad z_C = 1+2i$

3) $\int\limits_{AB} \bar{z}^2 dz, \quad AB: |z| = 2, \quad -\dfrac{p}{2} \le \arg z \le \dfrac{p}{2}, \quad z_A = -2i, \quad z_B = 2i$

4) $\int\limits_{AB} \mathrm{Im}\, z^3 dz, \quad AB -$відрізок прямої, $z_A = 0, \quad z_B = 2+2i$

5) $\int\limits_{L} (z + 2\bar{z})dz, \quad L: |z| = 3$

6) $\int\limits_{AB} \operatorname{Im} z dz, \quad AB: y = x^3, \quad z_A = 1 + i, \quad z_B = 0$

7) $\int\limits_{AB} z^3 dz, \quad AB: x = y^2, \quad z_A = 0, \quad z_B = 2 + 4i$

8) $\int\limits_{AB} \bar{z} \operatorname{Re} z^3 dz, \quad AB -$ відрізок прямої, $z_A = 4 + 2i, \quad z_B = 0$

9) $\int\limits_{AB} |z| z dz, \quad AB: |z| = 2, \quad \operatorname{Re} z \ge 0, \quad \operatorname{Im} z \le 0, \quad z_A = 2, \quad z_B = 2i$

10) $\int\limits_{AB} z \operatorname{Re} z^2 dz, \quad AB -$ відрізок прямої, $z_A = -1 - 2i, \quad z_B = 1 + 2i$

11) $\int\limits_{AB} z e^z dz, \quad AB: y = 1 - x^2, \quad z_A = 1, \quad z_B = i$

12) $\int\limits_{AB} z \operatorname{Im} z dz, \quad AB: |z| = 1, \quad -\frac{p}{2} \le \arg z \le 0, \quad z_A = -i, \quad z_B = 1$

13) $\int\limits_{AB} \frac{z}{\bar{z}} dz, \quad AB: y = x^2, \quad z_A = 1 + i, \quad z_B = 0$

14) $\int\limits_{AB} \operatorname{Im} z^2 dz, \quad AB -$ відрізок прямої, $z_A = 0, \quad z_B = 2 + i$

15) $\int\limits_{L} z\bar{z} dz, \quad L: |z| = 5$

16) $\int\limits_{ABC} (2z - \bar{z})dz, \quad ABC -$ ламана, $z_A = 0, \quad z_B = -i, \quad z_C = -1 - i$

17) $\int\limits_{AB} (z^3 + z^2)dz, \quad AB: y = 2\sqrt{2x}, \quad z_A = 0, \quad z_B = 2 + 4i$

18) $\int\limits_{AB} \operatorname{Re} z^2 dz, \quad AB: x = y^2, \quad z_A = 1 - i, \quad z_B = 0$

19) $\int\limits_{AB} \operatorname{Re} z dz, \quad AB: |z| = 2, \quad 0 \le \arg z \le p, \quad z_A = -1, \quad z_B = 1$

20) $\int\limits_{AB} \operatorname{Im} \frac{\overline{z}}{z} dz, \quad AB -$ відрізок прямої, $z_A = 1 + i, \quad z_B = 2 + 2i$

21) $\int\limits_{AB} |z| \operatorname{Re} z dz, \quad AB: |z| = 1, \quad -\frac{p}{2} \le \arg z \le \frac{p}{2}, \quad z_A = -i, \quad z_B = i$

22) $\int\limits_{AB} z \operatorname{Im} z dz, \quad AB: y = 2x^2, \quad z_A = 0, \quad z_B = 1 + 2i$

23) $\int\limits_{AB} z e^z dz, \quad AB: |z| = 1, \quad \operatorname{Im} z \ge 0, \quad z_A = 1, \quad z_B = -1$

24) $\int\limits_{AB} |z| \operatorname{Re} z dz, \quad AB -$ відрізок прямої, $z_A = 0, \quad z_B = 2 - 4i$

25) $\int\limits_{AB} \overline{z} dz, \quad AB: |z| = 4, \quad 0 \le \arg z \le p, \quad z_A = -4, \quad z_B = 4$

26) $\int\limits_{AB} \frac{z}{\overline{z}} dz, \quad AB -$ відрізок прямої, $z_A = 0, \quad z_B = 3 + 3i$

27) $\int\limits_{AB} z \sin z dz, \quad AB: |z| = 1, \quad 0 \le \arg z \le p, \quad z_A = 1, \quad z_B = -1$

28) $\int\limits_{AB} (z^2 + \overline{z}) dz, \quad AB: y = 4 - x^2, \quad z_A = 4i, \quad z_B = 2$

29) $\int\limits_{AB} |z| dz, \quad AB -$ відрізок прямої, $z_A = 2 - i, \quad z_B = 0$

30) $\int\limits_{L} |z| \overline{z} dz, \quad L: |z| = 2.$

VI. Обчислити інтеграл (за інтегральною формулою Коші або формулою для похідної аналітичної функції)

1) $\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{dz}{(z+1)^2(z-1)}$

2) $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{dz}{z(z^2+4)}$

3) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{(z+1)^3}$

4) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{zdz}{(z-1)^2(z-2)}$

5) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(z+1)}$

6) $\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{e^z dz}{z^2(z-1)}$

7) $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{dz}{(z-i)(z+1)^2}$

8) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{zdz}{(z+1)^2(z-3)}$

9) $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{\sin zdz}{z^2+4}$

10) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)}$

11) $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^3-4z}$

12) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z dz}{(z-i)^3}$

13) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{shzdz}{z^2(z+2)}$

14) $\oint\limits_{|z+i|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{z(z^2+1)}$

15) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin zdz}{(z+i)^2}$

16) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z dz}{(z^2-4)(z+2)}$

17) $\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{\cos zdz}{z(z^2+1)}$

18) $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{dz}{(z-2)^4(z+1)}$

19) $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$

20) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{\left(z^2+9\right)\left(z+9\right)}$

21) $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}dz$

22) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{zshz}{\left(z^2-1\right)^2}dz$

23) $\oint\limits_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}$

24) $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-1)^2(z-3)}dz$

25) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2-4z+3}dz$

26) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1-\sin z}{z^2}dz$

27) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{tgz}{ze^{\frac{1}{z+2}}}dz$

28) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^3}\cos\frac{\pi}{z+1}dz$

29) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z\sin(z-1)}{z^2-1}dz$

30) $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2-4)^2}dz$

VII. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в околі точки z_0 або у вказаній області

1) $\frac{z+1}{z^2+4z-5}, \quad z_0=0$

2) $\frac{2z+3}{z^2+3z+2}, \quad 1<|z|<2$

3) $\frac{\sin^2 z}{z}, \quad z_0=0$

4) $\frac{1}{z^2-5z+6}, \quad |z|>3$

5) $\frac{1}{(z+2)(1+z^2)}, \quad 1<|z|<2$

6) $ze^{\frac{1}{z+i}}, \quad z_0=-i$

7) $z^4\cos\frac{1}{z}, \quad z_0=0$

8) $\frac{z+2}{z^2-2z-3}, \quad 1<|z-2|<3$

9) $\frac{1}{z^2+2z-8}, \quad 2<|z+2|<4$

10) $\sin(2z+1), \quad z_0=-1$

11) $\frac{2z}{z^2-4}, \quad 1<|z-3|<5$

12) $\frac{4z}{z^2+6z+5}, \quad z_0=0$

13) $\frac{1}{z^2-5z+6}, \quad 2<|z|<3$

14) $\dfrac{1}{z^2+1}, \quad 0<|z-i|<2$

15) $\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}, \quad |z-1|>2$

16) $z^5 \sin\dfrac{1}{z}, \quad z_0=0$

17) $\dfrac{z+2}{z^2+2z-3}, \quad |z-2|<1$

18) $\dfrac{z+2}{z^2+2z-3}, 1<|z-2|<5$

19) $\dfrac{2z}{z^2+4}, \quad |z|>2$

20) $\ln(2-z), \quad z_0=0$

21) $\dfrac{z+2}{z^2+2z-3}, \quad |z-2|>5$

22) $\dfrac{2z}{z^2+4}, \quad |z|<2$

23) $\dfrac{1}{z}\cos^2\dfrac{2}{z}, \quad z_0=0$

24) $\dfrac{1}{(z+2)(1+z^2)}, \quad |z|>2$

25) $\dfrac{2z+1}{z^2+z-12}, \quad z_0=0$

26) $\dfrac{z-1}{z^2+z}, \quad 3<|z-3|<4$

27) $\dfrac{1}{z}\left(e^{z^2}-1\right), \quad z_0=0$

28) $\dfrac{2z}{z^2-4}, \quad |z-3|>5$

29) $\dfrac{z+3}{z^2-1}, \quad 1<|z-2|<3$

30) $\dfrac{z}{z^2+1}, \quad z_0=-2.$

VIII. Обчислити інтеграл (з допомогою лишків)

1) $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{e^{\frac{1}{z}}+1}{z}dz$

2) $\oint\limits_{|z|=2} tgz dz$

3) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin\dfrac{1}{z}dz$

4) $\oint\limits_{|z-1|=3} (z-2)\cos\dfrac{1}{z-2}dz$

5) $\oint\limits_{|z|=1} z\,tg\,\pi z\,dz$

6) $\oint\limits_{|z|=1} z\left(1-\cos\frac{1}{z}\right)dz$

7) $\oint\limits_{|z|=1} z^3\sin\frac{1}{z}dz$

8) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2}{\sin^3 z\cos z}dz$

9) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{tgz}{z}dz$

10) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}} (z+1)e^{1/z}dz$

11) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z^3\cos\frac{1}{z}dz$

12) $\oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} z\left(e^{\frac{1}{z+1}}-1\right)dz$

13) $\oint\limits_{|z+1|=1} \frac{z}{\cos z}dz$

14) $\oint\limits_{|z|=1} ze^{\frac{1}{z^2}}dz$

15) $\oint\limits_{|z|=4} ctgzdz$

16) $\oint\limits_{|z|=\frac{2}{3}} \left(z\sin\frac{1}{z^2}+e^z\cos z\right)dz$

17) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{ctgz}{z}dz$

18) $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{dz}{\cos^2 z}$

19) $\oint\limits_{|z+1|=4} \frac{z}{e^z+3}dz$

20) $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{z}{\sin z}dz$

21) $\oint\limits_{|z+2|=3} zctgzdz$

22) $\oint\limits_{|z|=1} (z+2)^2\sin\frac{1}{z}dz$

23) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z}{\sin^2 z}dz$

24) $\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} z\,ctg\,\pi z\,dz$

25) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$

26) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$

27) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$

28) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+16)^2}dx$

29) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+5}{(x^2+9)^2}dx$

30) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

IX. За даним зображенням знайти оригінал

1) $\frac{p+1}{p^2(p^2+p-2)}$

2) $\frac{p}{(p^2+1)(p^2+9)}$

3) $\frac{4p^3+14p^2-p-6}{p^2(p^2-p-6)}$

4) $\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$

5) $\frac{12}{p^3-8}$

6) $\frac{-6p^2+41p-44}{(p-3)^2(p+2)}$

7) $\frac{p^3+4p^2-8p-5}{p^2(p^2+2p+5)}$

8) $\frac{p^3-8p-10}{p^2(p^2+4p+5)}$

9) $\frac{5p^3+12p^2+5p+8}{(p+1)^2(p^2+4)}$

10) $\frac{2p^2-8p+9}{(p-2)^2(p^2-4p+5)}$

11) $\frac{2p^3-7p}{(p^2+1)^2(p^2+4)}$

12) $\frac{3p^3-11p^2+12p+4}{(p-2)^2(p^2+4)}$

13) $\frac{2p^3+p^2+2p+5}{p^3(p^2+2p+5)}$

14) $\frac{12}{p(p^2+1)(p^2+4)}$

15) $\frac{4p^3-11p^2+12p-15}{p^2(p^2-4p+5)}$

16) $\frac{p^3-5p^2+10p-48}{p(p+3)(p^2+16)}$

17) $\frac{24(p+2)}{p^2(p^2+5p+4)}$

18) $\frac{p+5}{p^2+2p+5}$

19) $\frac{2p^3-4p^2-3p+10}{(p^2-2p+5)(p^2-2p+10)}$

20) $\frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}$

21) $\dfrac{7p^3+2p^2+45}{p^2(p^2+9)}$

22) $\dfrac{1}{(p-2)^2(p^2+1)}$

23) $\dfrac{-p+2}{(p-1)(p^2-4p+5)}$

24) $\dfrac{3p^2+16p+35}{(p+2)(p^2+2p+5)}$

25) $\dfrac{2p+3}{(p-1)(p^2-p+1)}$

26) $\dfrac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$

27) $\dfrac{2(4p^2-3p+24)}{(p-1)^2(p^2+9)}$

28) $\dfrac{1}{(p^2-6p+13)(p^2-6p+10)}$

29) $\dfrac{-8p-9}{(p-1)^2(p^2+6p+10)}$

30) $\dfrac{5p^2-5p+8}{(p+3)(p^2-4p+13)}$.

X. Операційним методом знайти розв'язок диференціального рівняння або системи диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах

1) $x''-3x'+2x=12e^{3t}, \quad x(0)=2, \quad x'(0)=6$

2) $x''-x=4\sin t+5\cos 2t, \quad x(0)=-1, \quad x'(0)=-2$

3) $2x''-x'=1, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=1$

4) $x''+x'-2x=e^t, \quad x(0)=-1, \quad x'(0)=0$

5) $x''-2x'+x=\sin t, \quad x(0)=1, \quad x'(0)=1$

6) $x''+x=4e^t, \quad x(0)=4, \quad x'(0)=-3$

7) $x''-2x'=e^{2t}, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=0$

8) $x''-2x'+2x=1, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=0$

9) $x'' + x' - 2x = \cos t - 3\sin t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2$

10) $x'' - 8x' + 16x = e^{4t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$

11) $x'' + x' = t^2 + 2t, \quad x(0) = 4, \quad x'(0) = -2$

12) $x'' + x = \cos t + \cos 3t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$

13) $x'' - 3x' + 2x = e^{t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$

14) $x'' + 2x' + x = \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$

15) $x'' - x = \sin t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0$

16) $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x - 2y \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 2$

17) $\begin{cases} x' + 3x + y = 0 \\ y' - x + y = 0 \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1$

18) $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x - y + 9 \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0$

19) $\begin{cases} x' = -3x - 4y + 1 \\ y' = 2x + 3y \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0$

20) $\begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t} \\ y' - 2x + y = 7e^{2t} \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 3$

21) $\begin{cases} x' = 4x + 3 \\ y' = x + 2y \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 0$

22) $\begin{cases} x' + 4x + 4y = 0 \\ y' + 2x + 6y = 0 \end{cases} \quad x(0) = 3, \quad y(0) = 15$

23) $\begin{cases} 4x' - y' + 3x = \sin t \\ x' + y = \cos t \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = -1$

24) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1$

25) $\begin{cases} x' = -2x + 6y + 1 \\ y' = 2x + 2 \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1$

26) $\begin{cases} x' - x + 3y = 0 \\ y' - 3x - y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 2$

27) $\begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t \\ y' + x + 2y = \sin t \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 0$

28) $\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = -x + y \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 0$

29) $\begin{cases} x' - 2(x + y + 1) = 0 \\ y' - 4y - 1 = 0 \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1$

30) $\begin{cases} x' - x - y = 0 \\ y' - 3x + y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = -2.$

ЛІТЕРАТУРА

1. Араманович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости, “Наука”, М., 1968.

2. Бугров Я. С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Дрофа, 2004.

3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. т. 2 – М.: Физматлит, 1996.

4. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981.

5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах с решениями. В 2ч. Ч.2: Учебное пособие для вузов. – М.: ОНИКС 21век, 2006.

6. Вища математика: Функція однієї змінної, її границя та похідна: Методичні вказівки до самостійної роботи студентів напряму підготовки 6.050504 “Зварювання”. Укладачі: Довгай В.В., Мельник А.Ф. 2012. – 61с.

7. Вища математика: Функції кількох незалежних змінних: Методичні вказівки до виконання самостійних робіт для студентів напряму підготовки 6.050504 „Зварювання”. Укладачі: Довгай В.В., Мельник А.Ф., Коцюк Л.Р. 2010. - 49с.

8. Вища математика: Інтегральне числення функцій однієї змінної: Методичні вказівки до самостійної роботи студентів напряму підготовки 6.050504 “Зварювання”. Укладачі: Довгай В.В., Мельник А.Ф. 2011. – 51с.

9. Вища математика: Числові та функціональні ряди: Методичні вказівки до самостійної роботи студентів напряму підготовки 6.050504 “Зварювання”. Укладачі: Довгай В.В., Мельник А.Ф. 2012. – 63с.

ЗМІСТ