МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Розділ: КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ

За напрямом 6.050504 "зварювання"

ЗАТВЕРДЖЕНО ВЧЕНОЮ РАДОЮ ФІЗИКО -МАТЕМАТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ НТУУ «КПІ»

Київ 2013

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Методичні вказівки

За напрямом 6.050504 “Зварювання”

Укладачі: Довгай В.В., Мельник А.Ф., 2013 р., 79 с.

Затверджено Вченою Радою Фізико - математичного факультету

НТУУ “КПІ” (протокол № 3 від 28 травня 2013 р.)

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Методичні вказівки

За напрямом 6.050504 “Зварювання”

Укладачі: Довгай В.В., Мельник А.Ф.

Рецензент: Рижов Р.М., д. т. н., проф. каф. ЕЗУ

Відповідальний редактор: Швець О.Ю., д. ф.-м. н., проф. кафедри математичної фізики

ВСТУП

Методичні вказівки “Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли” укладені для студентів зварювального факультету з метою забезпечення виконання ними самостійної роботи, що передбачена навчальною програмою з вищої математики та розробленою на її основі робочою навчальною програмою кредитного модуля “Кратні інтеграли та функції комплексної змінної” для напрямку підготовки бакалавра 6.050504 “Зварювання”.

Методичні вказівки складаються з чотирьох розділів. В першому розділі коротко викладено необхідний теоретичний матеріал стосовно подвійних та потрійних інтегралів, наведено основні означення відповідних математичних понять та формули для розрахунків. Другий та третій розділи мають подібну структуру і присвячені криволінійним та поверхневим інтегралам як першого так і другого роду. Для кращого їх сприйняття наводиться достатня кількість малюнків. Всі три розділи містять багато прикладів детального розв’язування типових задач з подвійними, потрійними, криволінійними та поверхневими інтегралами. В четвертому розділі містяться задачі для самостійної роботи студентів, якою можуть бути домашні завдання, модульні або домашні контрольні роботи.

Підбір матеріалу і його викладення в методичних вказівках “Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли” дозволяє використовувати їх як для денної, так і для заочної форми навчання студентів.

РОЗДІЛ І. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

1. Подвійний інтеграл та його властивості

Розглянемо функцію двох змінних $f(x, y)$, що визначена в деякій області D на площині, і будемо вважати, що ця область має площу. Розіб’ємо довільним чином D на n частинних областей $D_k\ (k = 1, 2, \ldots, n)$ з площами ΔS_k та виберемо в кожній з них довільно точки $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$ (рис 1).

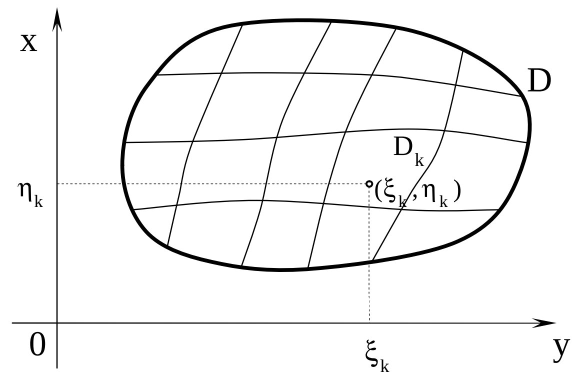

Рис. 1

Утворимо суму виду $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k$, яка називається ***інтегральною сумою***, складеною для функції $f(x, y)$ при даному розбитті D на D_k та при даному виборі точок $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$. Введемо позначення $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n}\{d_k\}$, де d_k визначається формулою

$$d_k = \sup_{(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D_k} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

та називається ***діаметром*** частинної області $D_k\ (k = 1, 2, \ldots, n)$.

Якщо існує скінченна границя при $\lambda \to 0$ утвореної інтегральної суми і ця границя не залежить ні від способу розбиття D на D_k, ні від способу вибору точок $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$, то ця границя і називається ***подвійним***

інтегралом від функції $f(x,y)$ по області D та позначається символом $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. При цьому кажуть, що $f(x,y)$ є ***інтегрованою*** в D. Отже згідно з означенням маємо

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta S_k .$$

Зауважимо, що коли $f(x,y)$ неперервна в замкненій області D, то вона буде і інтегрована в цій області.

Властивості подвійного інтеграла

Тут всі підінтегральні функції вважаються інтегрованими у відповідних областях, що мають площу

a) $\iint\limits_D dxdy = S$, S – площа D,

b) $\iint\limits_D Cf(x,y)dxdy = C\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, C – стала,

c) $\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy$,

d) Якщо $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy,$$

e) Якщо в області D виконується умова $f(x,y) \le g(x,y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy,$$

f) $\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_D |g(x,y)|dxdy$,

g) Теорема про середнє. Якщо $f(x,y)$ неперервна в замкненій, зв'язній області D, то знайдеться принаймні одна точка $(x_0,y_0)\in D$ така, що

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0) \cdot S,\text{ де } S \text{ – площа } D.$$

Властивості b) – c) часто називають властивостями ***лінійності*** подвійного інтеграла, а властивість d) – властивістю ***адитивності***.

2. Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах

а) Випадок прямокутної області.

Нехай область інтегрування D в подвійному інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ має вигляд $D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ (рис. 2)

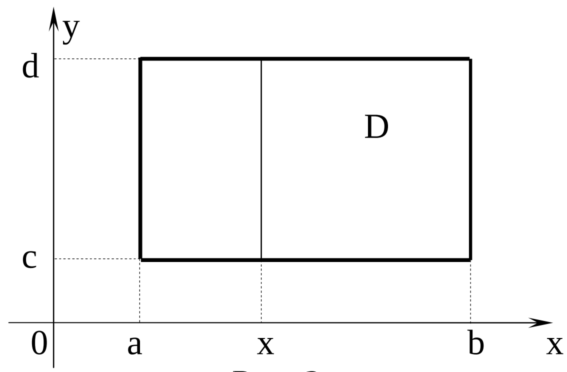

Рис. 2

В цьому випадку даний інтеграл обчислюється згідно з формулою

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx .$$

Вираз, що стоїть тут у правій частині, називається ***повторним інтегралом***, його обчислюють наступним чином:

Спочатку при фіксованому $x \in [a,b]$ інтегрують по змінній y від c до d (тобто по прямій, що зображена на рис. 2 суцільною лінією всередині області D) функцію $f(x,y)$. Після підстановки меж інтегрування c та d одержують функцію, залежну лише від змінної x, яку й інтегрують на відрізку $[a,b]$, що є проекцією D на вісь OX. Використовуючи позначення

$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$, попередню формулу записують в простішому вигляді $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$. Аналогічно, проектуючи область D на вісь OY, тобто інтегруючи $f(x,y)$ спочатку по змінній x а потім по y на відповідних відрізках, даний інтеграл обчислюють за формулою $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx$. Слід відзначити, що вибір порядку інтегрування в повторному інтегралі може суттєво вплинути на складність його обчислення.

<u>Приклад 1.</u> Знайти інтеграл $\iint\limits_D y \sin 2xy dxdy$, де область D обмежена прямими $y = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$ (рис. 3).

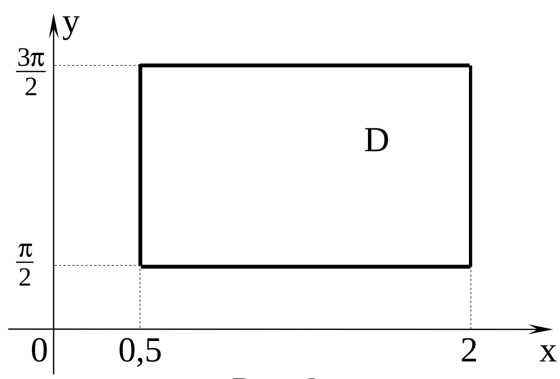

Рис. 3

Тут зручно область D, що має вигляд прямокутника, проектувати на вісь OY. При цьому підінтегральна функція, інтегруючись спочатку по змінній x від $x = \frac{1}{2}$ до $x = 2$ при фіксованому $y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, значно спрощується (внаслідок скорочення на $y \neq 0$). Маємо:

$$\iint\limits_D y\sin 2xy\,dxdy = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} dy \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} y\sin 2xy\,dx = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} y\frac{-\cos 2xy}{2y}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2} dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2xy\Big|_{0,5}^{2} dy = -\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos 4y - \cos y)\Big|dy = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 4y}{4} - \sin y\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6\pi}{4} - \sin\frac{3\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}(0+1-0+1) = -1.$$

b) Випадок криволінійної області.

Якщо область інтегрування D в подвійному інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ має вигляд $D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ (рис. 4), де функції

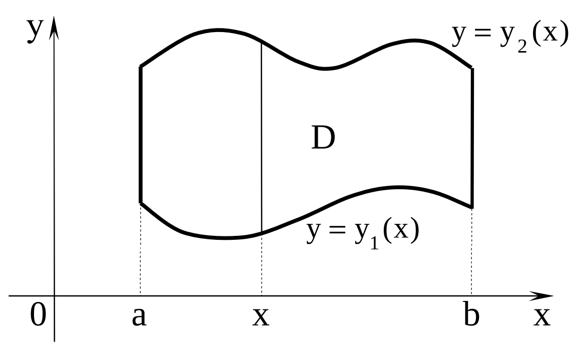

Рис. 4

$y = y_1(x)$ та $y = y_2(x)$ неперервні на $[a,b]$, проекцією D на вісь OX є відрізок $[a,b]$, то обчислення $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ здійснюється за допомогою формули $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$. Тут, як і в попередньому випадку, спочатку виконується інтегрування $f(x,y)$ по змінній y (x розглядається як параметр) та підстановка згідно з формулою Ньютона-Лейбніца у вираз для знайденої первісної замість аргумента у виразів

$y_1(x)$, $y_2(x)$. Після цього обчислюється визначений інтеграл на відрізку $[a, b]$ від одержаної функції, залежної лише від x.

Аналогічно відбувається обчислення $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ і тоді, коли область інтегрування D в подвійному інтегралі $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ має вигляд $D = \{(x, y) : c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$. Тут функції $x = x_1(y)$ та $x = x_2(y)$ неперервні на $[c, d]$, проекцією D на вісь OY є відрізок $[c, d]$. Дана область показана на рис. 5.

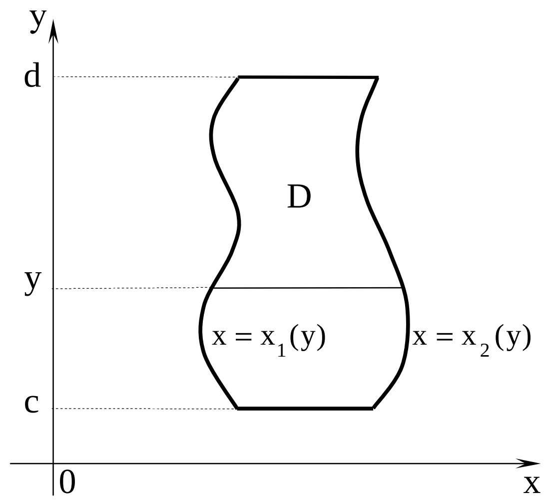

Рис. 5

Для такої області на відміну від попередньої, що зображена на рис 4, міняється порядок інтегрування в повторному інтегралі, формула для обчислення $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ набуває наступного вигляду $\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d dx \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dy$. Зауважимо, що коли маємо довільну область D, то її слід розбити на частини, подібні до зображених на рис. 4 та рис. 5, після чого для обчислення застосувати властивість адитивності подвійного інтеграла.

<u>Приклад 2.</u> Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$.

В першому доданку в повторному інтегралі розставлені межі інтегрування для області D_1, а в другому – для D_2, які обмежені лініями

$$D_1: \begin{array}{ll} x = -\sqrt{3}, & y = \sqrt{4-x^2}, \\ x = -2, & y = 0, \end{array} \qquad D_2: \begin{array}{ll} x = 0, & y = 2-\sqrt{4-x^2}, \\ x = -\sqrt{3}, & y = 0. \end{array}$$

Враховуючи, що рівняння $y = \sqrt{4-x^2}$ описує верхню половину кола $x^2 + y^2 = 4$, рівняння $y = 2-\sqrt{4-x^2}$ – нижню половину кола $x^2 + (y-2)^2 = 4$, а всі інші рівняння описують прямі лінії, зображуємо D_1 та D_2 на координатній площині (рис. 6).

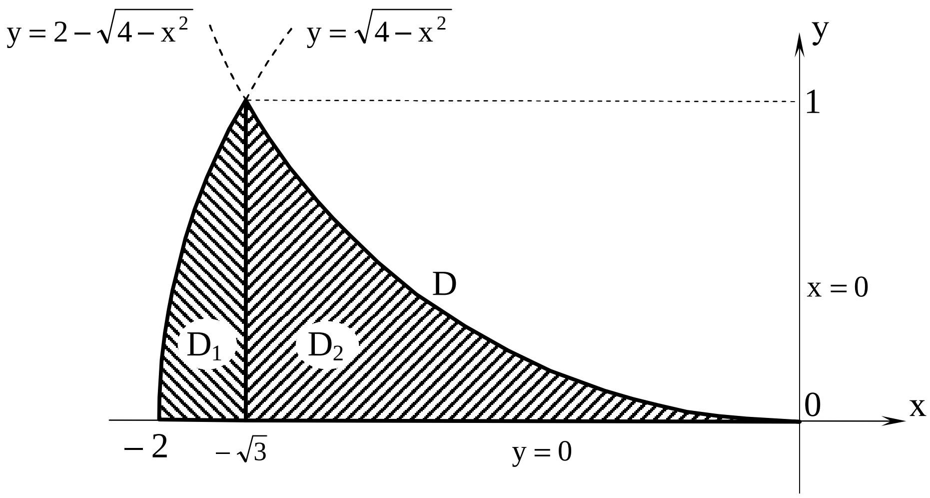

Рис. 6

D_1 та D_2 утворюють одну область D, яка проектується на вісь ОУ від $y = 0$ до $y = 1$. Ці значення й будуть межами інтегрування по змінній y. При кожному фіксованому значенні $y \in [0,1]$, розв'язуючи рівняння $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + (y-2)^2 = 4$, одержуємо відповідно нижню та верхню межі інтегрування по змінній x:

$x = -\sqrt{4-y^2}$ (ліва половина кола $x^2 + y^2 = 4$),

$x=-\sqrt{4-(y-2)^2}=-\sqrt{4y-y^2}$ (ліва половина кола $x^2+(y-2)^2=4$).

Остаточно маємо

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}}dx\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int_{-\sqrt{3}}^{0}dx\int_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy=\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}}f(x,y)dy.$$

<u>Приклад 3.</u> Обчислити інтеграл $\iint\limits_D xdxdy$, де область D обмежена лініями $y=x+2,\ y=2x+4-x^2$.

Починаємо з рисунка області D, знайшовши абсциси $x_1=-1,\ x_2=2$ точок перетину $M_1,\ M_2$ параболи $y=2x+4-x^2$ та прямої $y=x+2$ як розв'язки рівняння $x+2=2x+4-x^2$. При цьому $y_1=1,\ y_2=4$ і отже парабола та пряма перетинаються в точках $M_1(-1,1),\ M_2(2,4)$ (рис. 7).

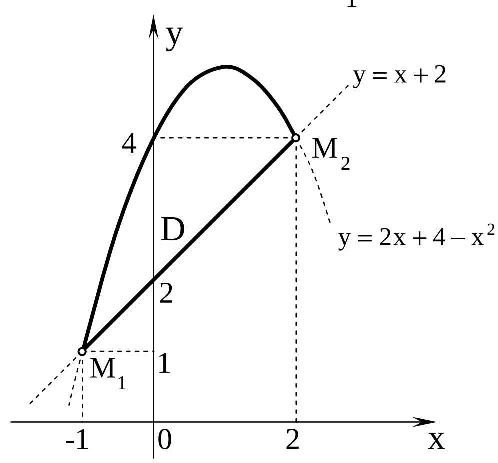

Рис. 7

Проекцією області D на вісь OX буде відрізок $[-1,2]$, при цьому при фіксованому $x\in[-1,2]$ інтегрування по змінній y здійснюється від $y=x+2$ до $y=2x+4-x^2$. Враховуючи це, маємо

$$\iint\limits_D xdxdy=\int_{-1}^{2}dx\int_{x+2}^{2x+4-x^2}xdy=\int_{-1}^{2}xy\Big|_{x+2}^{2x+4-x^2}dx=\int_{-1}^{2}x(2x+4-x^2-x-2)dx=$$

$$= \int_{-1}^{2}(x^2 + 2x - x^3)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + 4 - 4 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

3. Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах

Якщо область D обмежена колами або їх частинами та променями, що виходять з початку координат, то тоді обчислення інтеграла $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ може бути простішим, коли від декартових координат x, y перейти до полярних ρ, φ (рис. 8) за допомогою формул

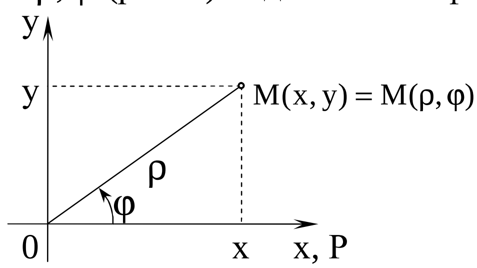

Рис. 8

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$$
$$\rho \geq 0,\ \varphi \in [0, 2\pi].$$

При цьому $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \left[\begin{array}{ll} -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0, \\ \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}, & x > 0, \\ \pi + \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}, & x < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \end{array}\right.$

а сама ***формула переходу від прямокутних декартових координат до полярних*** має вигляд

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_1(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

Тут G – область, на яку відображається D за допомогою формул переходу від декартових координат до полярних і яка обмежена променями $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ та кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, на які відображається границя D. Зображати область G не потрібно, можна обмежитись лише рисунком D та геометричною інтерпретацією полярних координат, даною на рис. 8

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D ydxdy$, де область D обмежена лініями

$y = x,\ y = 0,\ y = \sqrt{2x - x^2},\ y = \sqrt{4x - x^2}$.

Враховуючи, що криві $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = \sqrt{4x - x^2}$ описують верхні половини кіл $(x-1)^2 + y^2 = 1,\ (x-2)^2 + y^2 = 4$, зображуємо область D на координатній площині XOY (рис. 9).

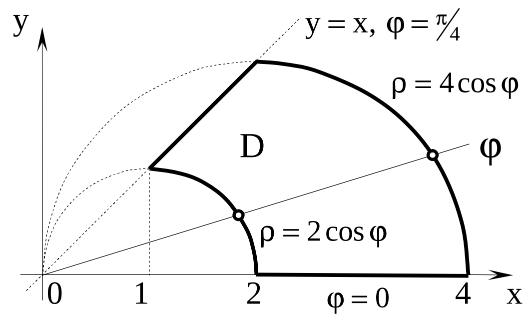

Рис. 9

Ця область розміщена між променями $\varphi = 0,\ \varphi = \pi/4$ та частинами кіл $x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x$, що в полярних координатах мають рівняння $\rho = 2\cos\varphi,\ \rho = 4\cos\varphi$. Отже, при кожному $\varphi \in [0, \pi/4]$ інтегрування по змінній ρ здійснюється від $\rho = 2\cos\varphi$ до $\rho = 4\cos\varphi$. Маємо

$$\iint\limits_D ydxdy = \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho\sin\varphi\rho d\rho = \int\limits_0^{\pi/4} \sin\varphi \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/4} \sin\varphi(64\cos^3\varphi -$$

$$-8\cos^3\varphi)d\varphi = \frac{56}{3}\int\limits_0^{\pi/4} \sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi = -\frac{56}{3}\int\limits_0^{\pi/4} \cos^3\varphi d(\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{14}{3}\cos^4\varphi\Big|_0^{\pi/4} = -\frac{14}{3}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - 1\right) = -\frac{14}{3}\left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{7}{2}.$$

4. Застосування подвійного інтеграла до розв'язування геометричних задач

а) Обчислення площ плоских фігур.

Якщо плоска фігура зображується областю D на координатній площині XOУ, то її площу S, як випливає з властивостей подвійного інтеграла, можна обчислити за допомогою формули $S = \iint\limits_D dxdy$.

<u>Приклад 5.</u> Обчислити площу плоскої фігури, яка обмежена кривою $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

Запишемо рівняння кривої в полярних координатах

$$(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = x^2 + y^2,\ \rho^4 - 2\rho^4\cos^2 x \sin^2 x = \rho^2,$$

$$\rho^2(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi) = 1,\ \rho^2(1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4\varphi)) = 1,\ \rho^2(3 + \cos 4\varphi)) = 4,$$

$$\rho^2 = \frac{4}{3 + \cos 4\varphi},\ \rho = \frac{2}{\sqrt{3 + \cos 4\varphi}}.$$

Враховуючи періодичність з періодом $\frac{\pi}{2}$ функції $\cos 4\varphi$, будуємо графік заданої кривої в полярних координатах (рис. 10)

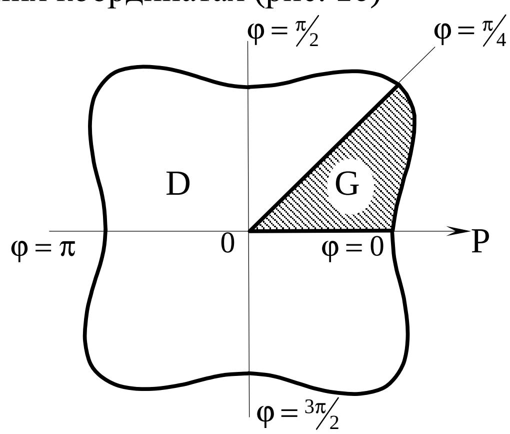

Рис. 10

Використовуючи симетричність фігури, зображеної на рис. 10, будемо обчислювати не всю її площу S, а лише восьму частину цієї площі (на рис. 10 – заштрихована), що допоможе уникнути труднощів при обчисленні відповідного інтеграла (доведеться робити заміну $t = \mathrm{tg}2\varphi$, яка коректна при $\varphi \in (-\pi/4, \pi/4)$). Отже, маємо $\frac{S}{8} = \iint\limits_G dxdy = \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\frac{2}{\sqrt{3+\cos 4\varphi}}} \rho d\rho =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} \rho^2 \Big|_0^{\frac{2}{\sqrt{3+\cos 4\varphi}}} d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} \frac{4}{3+\cos 4\varphi} d\varphi = \left| \begin{matrix} \mathrm{tg}2\varphi = t, & d\varphi = \dfrac{dt}{2(1+t^2)}, \\ \varphi = \dfrac{\mathrm{arctg}t}{2}, & \cos 4\varphi = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(3 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot 2(1+t^2)} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$S = 8 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi\sqrt{2}.$$

b) Обчислення об’ємів тіл.

Якщо тіло обмежене знизу площиною $z = 0$, зверху – поверхнею $z = f(x, y)$, $f(x, y) > 0$, $(x, y) \in D$, а з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі OZ а напрямною служить границя області D (рис. 11),

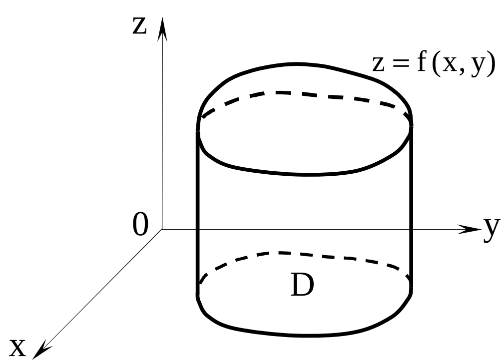

Рис. 11

то, як випливає з геометричної інтерпретації процесу утворення подвійного інтеграла, об’єм V такого тіла обчислюється за формулою $V = \iint\limits_D f(x, y) dxdy$. При цьому область D є проекцією даного тіла на координатну площину XOY.

<u>Приклад 6.</u> Обчислити об'єм тіла, що обмежене поверхнями $x+y=6$, $x=\sqrt{3y}$, $z=\frac{4x}{3}$, $z=0$.

Дане тіло обмежене зверху площиною $z=\frac{4x}{3}$, знизу – координатною площиною $z=0$, а з боків – циліндричною поверхнею $x=\sqrt{3y}$ та площинами $x+y=6$, $x=0$. Останні три поверхні разом утворюють циліндричну поверхню з твірними, паралельними осі OZ, та напрямною, яка є границею області D. Тут D – проекція даного тіла на координатну площину XOY, що має рівняння $z=0$ (рис. 12, 13).

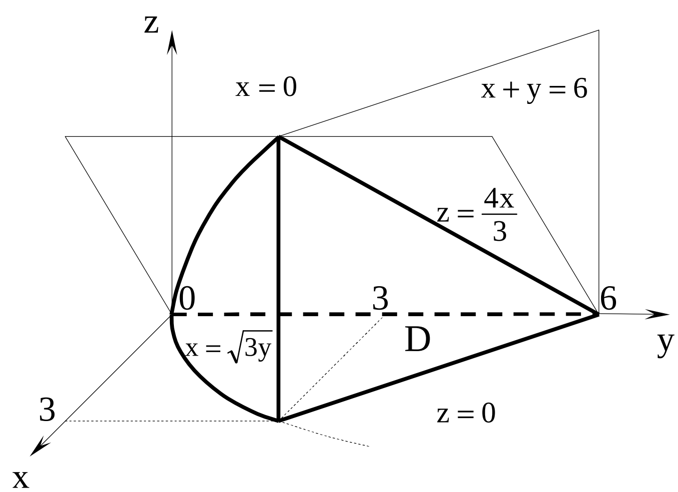

Рис. 12

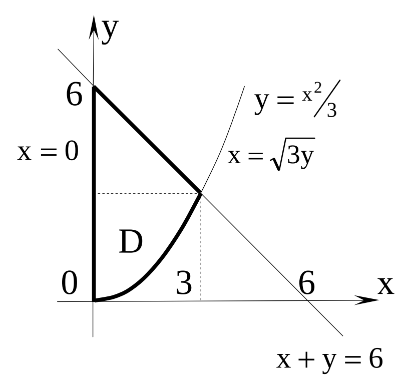

Рис. 13

Слід відзначити, що для обчислення об'єму V цього тіла можна було виконати лише рисунок області D, при достатньо розвиненій просторовій уяві та відповідних знаннях елементів аналітичної геометрії без рис. 12 можна обійтись. Згідно з рис. 13 вибираємо порядок інтегрування та розставляємо межі інтегрування в повторному інтегралі. Маємо, враховуючи, що $x=\sqrt{3y}$ – рівняння правої частини параболи $y=\frac{x^2}{3}$

$$V=\iint\limits_D \frac{4x}{3}dxdy=\frac{4}{3}\int_0^3 dx\int_{\frac{x^2}{3}}^{6-x} xdy=\frac{4}{3}\int_0^3 xy\Big|_{\frac{x^2}{3}}^{6-x}dx=\frac{4}{3}\int_0^3 x\left(6-x-\frac{x^2}{3}\right)dx=$$

$$= \frac{4}{3}\left(3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12}\right)\Big|_0^3 = \frac{4}{3}\left(27 - 9 - \frac{27}{4}\right) = 24 - 9 = 15.$$

c) Обчислення площ поверхонь.

Нехай поверхня явно задана рівнянням $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ є неперервною разом із частинними похідними $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в деякій області D (область D – проекція даної поверхні на координатну площину XOУ). Тоді площа σ цієї поверхні обчислюється за формулою

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

Приклад 7. Знайти площу σ частини поверхні $y^2 + z^2 = x^2$, що лежить всередині циліндра $x^2 + y^2 = R^2$ (рис. 14).

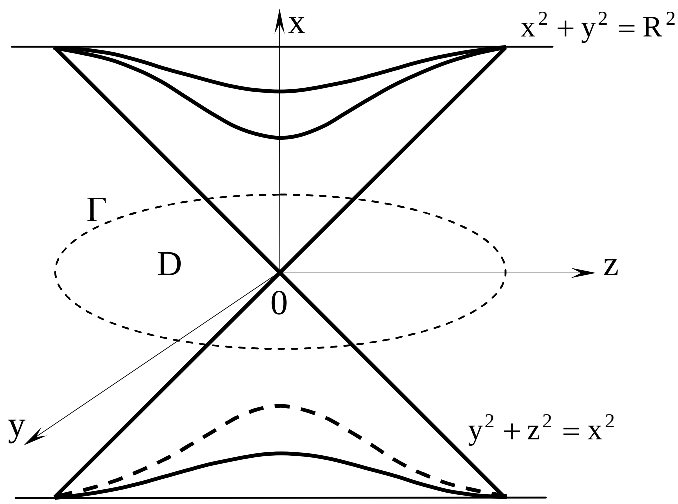

Рис. 14

Спроектуємо вказану частину поверхні на координатну площину YOZ. Цю проекцію позначимо через D, вона буде обмежена границею Г, яка є проекцією лінії перетину поверхонь $y^2 + z^2 = x^2$, $x^2 + y^2 = R^2$. Криву Г знаходимо, виключаючи з рівнянь $y^2 + z^2 = x^2$, $x^2 + y^2 = R^2$ змінну x. В результаті одержуємо рівняння еліпса $z^2 + 2y^2 = R^2$. В просторі – це еліптичний циліндр, він і проектує лінію перетину поверхонь $y^2+z^2=x^2$, $x^2+y^2=R^2$ на координатну площину YOZ. На область D з границею Г проектуються дві однакові за площею частини конуса $y^2+z^2=x^2$, кожна з яких описується одним з двох рівняннь $x=\pm\sqrt{y^2+z^2}$, тому $\sigma=2\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz$. Тут

$x=\sqrt{y^2+z^2}$, $\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}$, $\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}$, і отже

$\sigma=2\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2}}dydz=2\iint\limits_D\sqrt{2}dydz=2\sqrt{2}\cdot S$, де S – площа D, обмеженої еліпсом $z^2+2y^2=R^2$. Приводимо останнє рівняння до канонічного вигляду $\frac{y^2}{\left(\frac{R^2}{2}\right)}+\frac{z^2}{R^2}=1$, звідки випливає, що цей еліпс має півосі $a=\frac{R}{\sqrt{2}}$, $b=R$. Як відомо, площа S плоскої фігури, обмеженої еліпсом з півосями a та b, обчислюється за формулою $S=\pi ab$, тому остаточно одержуємо $\sigma=2\sqrt{2}\cdot S=2\sqrt{2}\pi\frac{R}{\sqrt{2}}R=2\pi R^2$.

5. Потрійний інтеграл, його властивості та обчислення

Розглянемо функцію трьох змінних $f(x,y,z)$, що визначена в деякій області D в просторі, і будемо вважати, що ця область має об'єм. Розіб'ємо довільним чином D на n частинних областей D_k $(k=1,2,\ldots,n)$ з об'ємами ΔV_k та виберемо в кожній з них довільно точки $(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)\in D_k$.

Утворимо суму виду $\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)\Delta V_k$, яка називається ***інтегральною***

сумою, складеною для функції $f(x,y,z)$ при даному розбитті D на D_k та при даному виборі точок $(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)\in D_k$. Введемо позначення $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\{d_k\}$, де d_k визначається формулою

$$d_k=\sup_{(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in D_k}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

та називається ***діаметром*** частинної області D_k $(k=1,2,\mathbf{K},n)$.

Якщо існує скінченна границя при $\lambda\to 0$ утвореної інтегральної суми і ця границя не залежить ні від способу розбиття D на D_k, ні від способу вибору точок $(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)\in D_k$, то ця границя і називається ***потрійним інтегралом*** від функції $f(x,y,z)$ по області D та позначається символом $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$. При цьму кажуть, що $f(x,y)$ є ***інтегрованою*** в D. Отже згідно з означенням маємо

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)\Delta V_k.$$

Зауважимо, що коли $f(x,y,z)$ неперервна в замкненій області D, то

вона буде також інтегрована в цій області.

<u>Властивості потрійного інтеграла</u>

Тут всі підінтегральні функції вважаються інтегрованими у відповідних областях, що мають об'єм

a) $\iiint\limits_D dxdydz=V$, V – об'єм D,

b) $\iiint\limits_D Cf(x,y,z)dxdydz=C\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$, C – стала,

c) $\iiint\limits_D [f(x,y,z)+g(x,y,z)]dxdydz=\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz+$

$$+\iiint\limits_D g(x,y,z)dxdydz,$$

d) Якщо $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$,

то $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{D_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{D_2} f(x,y,z)dxdydz$,

e) Якщо в області D виконується умова $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$, то

$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz \le \iiint\limits_D g(x,y,z)dxdydz$,

f) $\left|\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz\right| \le \iiint\limits_D |g(x,y,z)|dxdydz$,

g) Теорема про середнє. Якщо $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій, замкненій, зв'язній області D, то знайдеться принаймні одна точка $(x_0, y_0, z_0) \in D$ така, що $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz \le f(x_0, y_0, z_0) \cdot V$, де V – об'єм D.

Всі ці властивості повністю аналогічні відповідним властивостям подвійного інтеграла. Так само як і для подвійного інтеграла, властивості b) – c) називають властивостями ***лінійності потрійного інтеграла***, а властивість d) – властивістю ***адитивності***.

6. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах

Нехай функція $f(x,y,z)$ визначена і неперервна в області D вигляду $D = \{(x,y,z) : (x,y) \in G,\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$, де $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ – неперервні в області G, що має площу. В геометричній інтерпретації це означає, що область D обмежена знизу та зверху відповідно поверхнями $z = z_1(x,y)$, $z = z_2(x,y)$, $(x,y) \in G$, а з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі OZ, а напрямною служить границя Г області G на координатній площині XOY. Сама область G є проекцією D на координатну площину XOY (рис. 15).

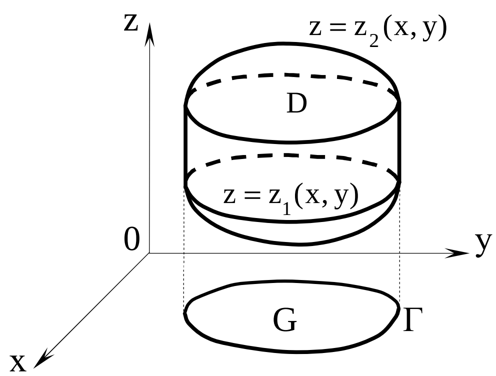

Рис. 15

При цих припущеннях для обчислення потрійного інтеграла $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz$ застосовується формула:

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

Тут інтегрування в правій частині відбувається спочатку по змінній z при фіксованих $x, y \in G$, після чого згідно з формулою Ньютона-Лейбніца виконується підстановка від $z = z_1(x, y)$ до $z = z_2(x, y)$. Одержану таким чином функцію, залежну лише від аргументів x та y, інтегрують по області G згідно з відповідними формулами для обчислення подвійного інтеграла.

Якщо область D має складніший вигляд, ніж зображений на рис. 15, її слід розбити на частини, до кожної з яких можна застосувати наведену формулу, після чого застосувати властивість адитивності потрійного інтеграла.

Приклад 1. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_D 21xzdxdydz$, якщо область D обмежена поверхнями $y = x,\ y = 0,\ x = 2,\ z = xy,\ z = 0$.

В даному випадку немає необхідності рисувати область D в просторі, так як очевидно, що вона обмежена знизу поверхнею $z = 0$, зверху – поверхнею $z = xy$, а з боків – циліндричною поверхнею, утвореною площинами $y = x,\ y = 0,\ x = 2$. При цьому за напрямну слід взяти замкнену лінію (контур) Г на координатній площині XOY, яка утворена лініями перетину даних площин з цією координатною площиною та мають на ній рівняння $y = x,\ y = 0,\ x = 2$. Проекцією D на координатну площину XOY буде область G, що обмежена контуром Г (рис. 16).

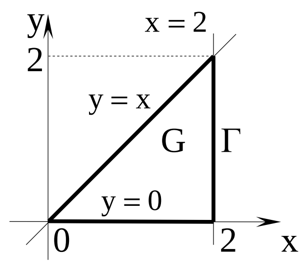

Рис. 16

Враховуючи це, згідно з формулами для обчислення потрійного та подвійного інтегралів, маємо

$$\iiint\limits_D 21xz\,dxdydz = 21\iint\limits_G dxdy\int\limits_0^{xy} xz\,dz = 21\iint\limits_G x\frac{z^2}{2}\Big|_0^{xy} dxdy =$$

$$= \frac{21}{2}\iint\limits_G x(x^2y^2 - 0)dxdy = \frac{21}{2}\iint\limits_G x^3y^2dxdy = \frac{21}{2}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^x x^3y^2dy =$$

$$\frac{21}{2}\int\limits_0^2 x^3\frac{y^3}{3}\Big|_0^x dx = \frac{7}{2}\int\limits_0^2 x^3(x^3 - 0)dx = \frac{7}{2}\,\frac{x^7}{7}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 2^7 = 64.$$

7. Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних та сферичних координатах

а) Обчислення потрійного інтеграла в ***циліндричних координатах***.

Циліндричні координати ρ, φ, z довільної точки M у просторі зв’язані з її декартовими координатами x, y, z за допомогою співвідношень

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \quad 0 \le \rho < +\infty,\ \varphi \in [0, 2\pi],\ -\infty < z < +\infty. \\ \quad z = z, \end{cases}$$

Геометрична інтерпретація циліндричних координат та їх зв'язок з декартовими показана на рис. 17.

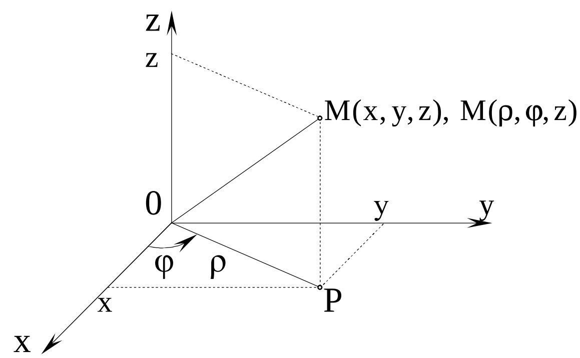

Рис. 17

Перехід від декартових координат до циліндричних полягає в переході до полярних координат на координатній площині XOY для проекції P точки M при незмінній координаті z. Звідси випливає наступна формула переходу від декартових координат до циліндричних для обчислення потрійного інтеграла у випадку, коли область інтегрування D має вигляд, зображений на рис. 15

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz =$$

$$= \iint\limits_Q \rho d\rho d\varphi \int\limits_{z_1(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)}^{z_2(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz.$$

Тут G – проекція D на координатну площину XOY, Q – область, на яку відображається G при переході від декартових координат до полярних на цій координатній площині. Після інтегрування по змінній z одержуємо подвійний інтеграл у полярних координатах. Зауважимо, що при його обчисленні через повторні інтеграли підінтегральну функцію слід, як правило, спочатку інтегрувати по змінній ρ, а потім після застосування формули Ньютона-Лейбніца завершити інтегрування одержаного виразу по змінній φ. Для спрощення процесу інтегрування перехід до полярних координат на координатній площині XOY слід здійснювати не відразу, а після завершення інтегрування по змінній z та одержання подвійного інтеграла у декартових координатах. В ряді випадків (коли область G є криволінійним сектором, обмеженим променями, що виходять з початку координат, та еліпсами $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ або їх частинами) доцільно переходити на координатній площині XOY до узагальнених полярних координат

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \end{cases} \quad 0 \le \rho < +\infty,\ \varphi \in [0, 2\pi],$$

що рівнозначно переходу в потрійному інтегралі до узагальнених циліндричних координат. При цьому геометрична інтерпретація φ залишається тією ж, рівняння еліпса переходить у рівняння $\rho = 1$, а попередня формула набуває вигляду

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_G dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz =$$

$$= \iint_Q ab\rho d\rho d\varphi \int_{z_1(a\rho\cos\varphi,\, b\rho\sin\varphi)}^{z_2(a\rho\cos\varphi,\, b\rho\sin\varphi)} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi, z)dz.$$

<u>Приклад 2.</u> Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_D x^2 dxdydz$, якщо область D обмежена поверхнями $y = \sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$, $z = 0$, $z = y$.

В даному випадку область D обмежена знизу площиною $z = 0$, зверху – площиною $z = y$, а з боків – циліндричною поверхнею $y = \sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$, твірні якої паралельні осі OZ а напрямною служить крива, що має рівняння

$y=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$ на координатній площині XOY. Це – рівняння верхньої половини еліпса $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ з півосями $a=3,\ b=1$, отже проекцією D на координатну площину XOY буде область G на цій площині, що обмежена кривою $y=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$ та прямою $y=0$ – лінією перетину площин $z=0$ та $z=y$ (рис. 18)

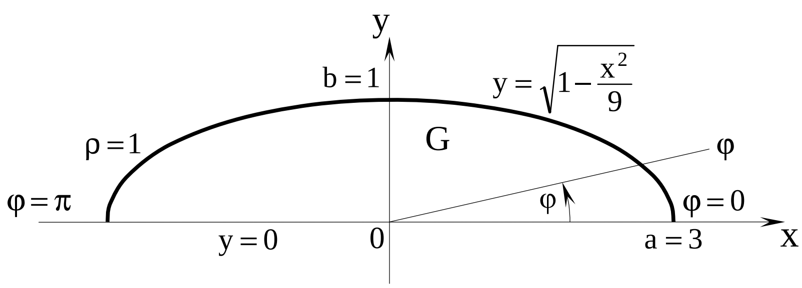

Рис. 18

Так як G обмежена двома променями, що виходять з початку координат під кутами $\varphi=0$ та $\varphi=\pi$ і верхньою половиною еліпса з півосями $a=3$ $b=1$, то при обчисленні даного інтеграла доцільно перейти до узагальнених циліндричних координат $\begin{cases} x=3\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=z, \end{cases}$ $\varphi\in[0,\pi]$. Для довільного кута $\varphi\in[0,\pi]$ нижньою межею інтегрування по змінній ρ буде значення $\rho=0$. Щоб знайти значення верхньої межі інтегрування по цій змінній, слід у канонічному рівнянні еліпса $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ перейти до узагальнених полярних координат ρ та φ у відповідності з формулами $\begin{cases} x=3\rho\cos\varphi, \\ y=b\rho\sin\varphi, \end{cases}$ $\varphi\in[0,\pi]$. Одержимо рівняння еліпса $\rho=1$ в цих координатах, звідки випливає, що верхньою межею інтегрування по змінній ρ буде значення $\rho = 1$. Враховуючи все це, послідовно одержуємо

$$\iiint_D x^2 dxdydz = \iint_G dxdy \int_0^y x^2 dz = \iint_G x^2 z\Big|_0^y dxdy = \iint_G x^2 y dxdy =$$

$$= \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 9\rho^2 \cos^2\varphi \, \rho \sin\varphi \cdot 3 \cdot 1 \cdot \rho d\rho = 27 \int_0^\pi \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi \cdot \int_0^1 \rho^4 d\rho =$$

$$= -27 \int_0^\pi \cos^2\varphi d(\cos\varphi) \cdot \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^1 = -\frac{27}{5} \cdot \frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^\pi = -\frac{9}{5}(-1-1) = \frac{18}{5}.$$

b) Обчислення потрійного інтеграла у ***сферичних координатах***.

У випадках, коли область D обмежена сферичними поверхнями та, можливо, конічними поверхнями і площинами, що проходять через координатні осі, спрощення процесу обчислення потрійного інтеграла можливе за допомогою переходу від декартових координат x, y, z до сферичних ρ, φ, θ, які зв'язяні співвідношеннями

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad 0 \le \rho < +\infty, \ \varphi \in [0, 2\pi], \ \theta \in [0, \pi]. \\ \quad z = \rho \cos\theta, \end{cases}$$

Геометрична інтерпретація сферичних координат та їх зв'язку з декартовими показана на рис. 19.

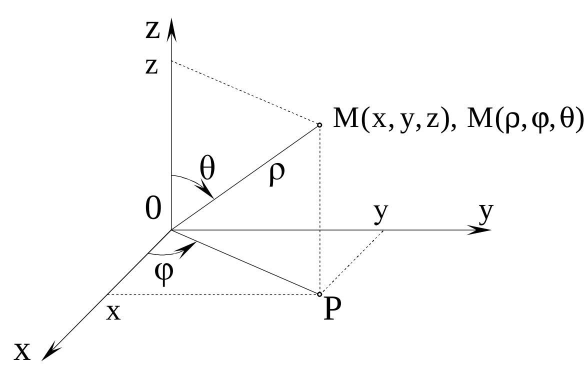

Рис. 19

Перехід від декартових координат до сферичних для обчислення потрійного інтеграла $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz$ здійснюється у відповідності з формулою: $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz =$

$$= \iiint\limits_G f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Тут G – область, на яку відображається D при переході від декартових координат до сферичних. Цю область можна не рисувати, а обмежитись зображенням області D та геометричною інтерпретацією сферичних координат.

<u>Приклад 2.</u> Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_D \frac{x^2+y^2}{z^2}dxdydz$, якщо область D обмежнна поверхнями $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$, $z = \frac{x^2+y^2}{3}$ (рис. 20).

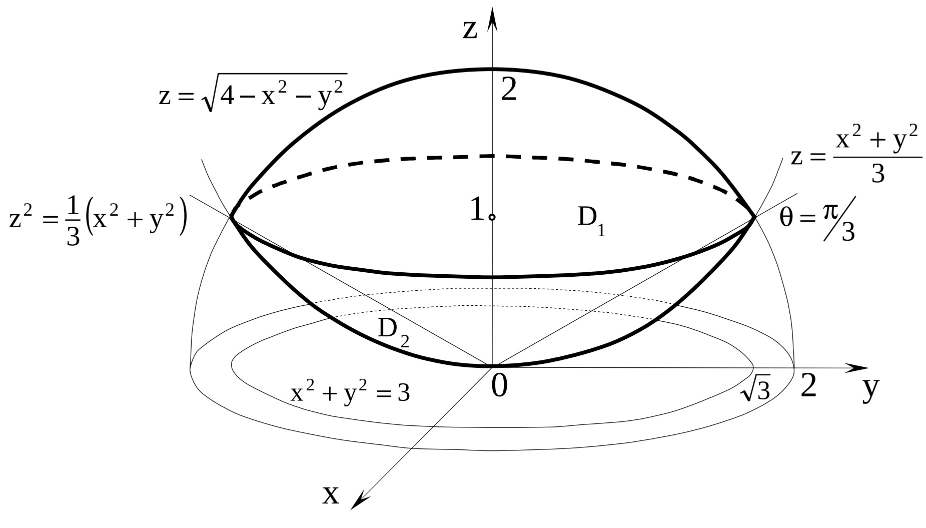

Рис. 20

Знаходимо спочатку лінію перетину верхньої половини сфери $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ та параболоїда обертання $z = \frac{x^2+y^2}{3}$

$$\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ z=\dfrac{x^2+y^2}{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x^2+y^2=3z, \\ z\ge 0, \end{cases} \quad \begin{cases} z^2+3z-4=0, \\ x^2+y^2=3z, \\ z\ge 0, \end{cases} \quad \begin{cases} z=1, \\ x^2+y^2=3. \end{cases}$$

Цю лінію можна розглядати як лінію перетину циліндра з твірними, паралельними осі OZ та напрямною $x^2+y^2=3$, що лежить на координатній площині XOY. Проведемо через кожну з точок $(0,\sqrt{3},1)$ і $(0,-\sqrt{3},1)$ на знайденій лінії перетину та через початок координат пару прямих $3z^2=y^2$. Якщо обертати ці прямі навколо осі OZ, одержимо конус обертання, який має рівняння $z^2=\frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)$ і який має зі сферичною поверхнею ту ж саму лінію перетину. В сферичних координатах рівняння конуса набуває вигляду $\rho^2\cos^2\theta=\frac{1}{3}\rho^2\sin^2\theta$, або $\theta=\frac{\pi}{3}$. Цей кону ділить область D на дві частини – D_1 $(0\le\theta\le\frac{\pi}{3})$ та D_1 $(\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$, тому внаслідок властивості адитивності ми можемо записати

$$\iiint\limits_D \frac{x^2+y^2}{z^2}dxdydz=\iiint\limits_{D_1}\frac{x^2+y^2}{z^2}dxdydz+\iiint\limits_{D_2}\frac{x^2+y^2}{z^2}dxdydz.$$

Переходимо тепер в правій частині до сферичних координат, враховуючи, що в цих координатах рівняння сфери $x^2+y^2+z^2=4$ та параболоїда обертання $z=\dfrac{x^2+y^2}{3}$ матимуть відповідно наступний вигляд: $\rho=2$, $\rho=\dfrac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}$. Тому на основі геометричної інтерпретації сферичних координат і рис. 20 одержуємо

$$\iiint\limits_D \frac{x^2+y^2}{z^2}dxdydz=\int\limits_0^{\pi/3}d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{2}\frac{\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta}\rho^2\sin\theta d\rho+$$

$$+\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}} \frac{\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta}\rho^2\sin\theta d\rho = 2\pi\int\limits_0^{\pi/3}\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}d\theta\int\limits_0^2\rho^2 d\rho +$$

$$+2\pi\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}d\theta\int\limits_0^{\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}}\rho^2 d\rho = -2\pi\int\limits_0^{\pi/3}\frac{(1-\cos^2\theta)d(\cos\theta)}{\cos^2\theta}d\theta\cdot\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^2 +$$

$$+2\pi\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}\cdot\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}}d\theta = -\frac{16\pi}{3}\left.\left(-\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)\right|_0^{\pi/3} +$$

$$+\frac{2\pi}{3}\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}\cdot\frac{27\cos^3\theta}{\sin^6\theta}d\theta = -\frac{16\pi}{3}\left(-2-\frac{1}{2}+1+1\right)+18\pi\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{d(\sin\theta)}{\sin^3\theta}d\theta =$$

$$=\frac{8\pi}{3}+18\pi\left.\frac{1}{-2\sin^2\theta}\right|_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{8\pi}{3}-9\pi\left(1-\frac{4}{3}\right)=\frac{8\pi}{3}+3\pi=\frac{17\pi}{3}.$$

РОЗДІЛ II. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

1. Криволінійний інтеграл першого роду та його властивості

Розглянемо деяку плоску криву $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$. Ця крива називається ***орієнтованою***, якщо на ній визначено напрямок руху від точки A до точки B. Ці точки називаються відповідно початком та кінцем кривої Г. Якщо точки A і B співпадають, то тоді Г називається ***замкненою*** кривою або ***контуром***. Нехай Г задається явно з допомогою рівняння $y = y(x)$, $x \in [a, b]$. Тоді, якщо похідна $y'(x)$ неперервна на $[a, b]$, крива Г називається ***гладкою***. У випадку, коли не гладку криву Г скінченною кількістю точок можна розбити на частини, кожна з яких є гладкою кривою, то вона називається ***кусочно гладкою***. Зауважимо, що як ладка, так і кусочно гладка крива Г завжди має довжину.

Нехай тепер в кожній точці гладкої кривої $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$, що лежить на координатній площині XOY, визначена функція $f(x, y)$, $(x, y) \in \Gamma$. Розіб'ємо дану криву точками $A = M_0, M_1, \ldots, M_k, M_{k+1}, \ldots, M_n = B$ на частинні криві $\overset{\frown}{M_k M_{k+1}}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, кожна з яких має довжину Δl_k. Виберемо довільно точки $(\xi_k, \eta_k) \in \overset{\frown}{M_k M_{k+1}}$ (рис. 21) і складемо суму виду $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k$, яка називається ***інтегральною сумою***, утвореною для функції $f(x, y)$ при даному розбитті Γ на частинні криві і при даному виборі точок (ξ_k, η_k) на кожній з них.

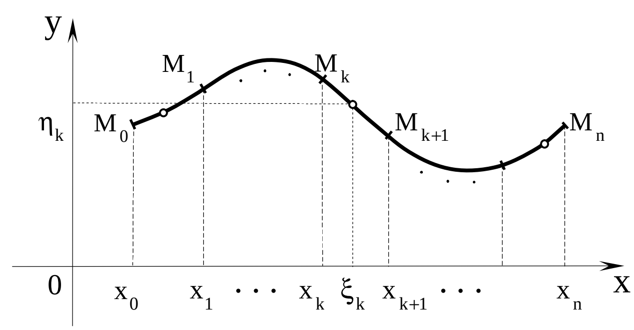

Рис. 21

Введемо позначення $\lambda = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \{\Delta l_k\}$. Якщо існує скінченна границя при $\lambda \to 0$ утвореної інтегральної суми і ця границя не залежить ні від способу розбиття кривої Γ на $\overset{\frown}{M_k M_{k+1}}$, ні від способу вибору точок $(\xi_k, \eta_k) \in \overset{\frown}{M_k M_{k+1}}$, то ця границя називається ***криволінійним інтегралом першого роду*** від функції $f(x, y)$ по кривій Γ та позначається одним із символів: $\int\limits_{\Gamma} f(x, y)dl$, $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)dl$. При цьому кажуть, що $f(x, y)$ є ***інтегрованою*** на Γ. Отже згідно з означенням маємо

$$\int\limits_{\Gamma} f(x, y)dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k$$

Якщо крива Γ є замкненою, то для позначення криволінійного інтеграла використовують також символ $\oint\limits_{\Gamma} f(x, y)dl$.

<u>Властивості криволінійного інтеграла першого роду</u>

Тут всі підінтегральні функції вважаються інтегрованими на відповідних гладких (або кусочно гладких) кривих.

a) Значення криволінійного інтеграла першого роду не залежить від орієнтації кривої $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$, тобто $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)dl = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(x, y)dl$,

b) $\int\limits_{\Gamma} dl = L$, L – довжина Γ,

c) $\int\limits_{\Gamma} Cf(x, y)dl = C\int\limits_{\Gamma} f(x, y)dl$, C – стала,

d) $\int\limits_{\Gamma} [f(x, y) + g(x, y)]dl = \int\limits_{\Gamma} f(x, y)dl + \int\limits_{\Gamma} g(x, y)dl$,

e) Якщо $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$, то

$$\int\limits_{\Gamma} f(x, y)dl = \int\limits_{\Gamma_1} f(x, y)dl + \int\limits_{\Gamma_2} f(x, y)dl,$$

f) Якщо на кривій Γ виконується умова $f(x, y) \le g(x, y)$, то

$$\int\limits_{\Gamma} f(x, y)dl \le \int\limits_{\Gamma} g(x, y)dl,$$

g) $\left|\int\limits_{\Gamma} f(x, y)dl\right| \le \int\limits_{\Gamma} |g(x, y)|dl$.

Властивості c) – d) – це властивості ***лінійності*** криволінійного інтеграла першого роду, а властивість e) – властивість ***адитивності***.

2. Обчислення криволінійного інтеграла першого роду

a) Випадок явно заданої кривої у декартових координатах.

Якщо гладка крива Γ задана в декартових координатах явно за допомогою рівняння $y = y(x),\ x \in [a, b]$, то тоді для обчислення криволінійного інтеграла першого роду $\int\limits_{\Gamma} f(x, y)dl$ застосовується формула

$$\int\limits_{\Gamma} f(x, y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx.$$

b) Випадок параметрично заданої кривої у декартових координатах.

Нехай гладка крива Γ задана в декартових координатах параметрично за допомогою рівнянь

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

В цьому випадку $\int\limits_{\Gamma} f(x, y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$.

Дана формула узагальнюється на випадок просторової кривої Γ, що задається параметрично рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \\ z = z(t), \end{cases}$$

Для такої кривої, на якій визначена функція трьох змінних $f(x, y, z)$, маємо

$$\int\limits_{\Gamma} f(x, y, z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt$$

c) Випадок, коли крива задана у полярних координатах.

Нехай гладка крива Γ задана в полярних координатах явно за допомогою рівняння $\rho = \rho(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta]$. При цьому функція $\rho = \rho(\varphi)$ є неперервною разом з похідною $\rho'(\varphi)$ на проміжку $[\alpha, \beta]$. Для обчислення криволінійного інтеграла першого роду $\int\limits_{\Gamma} f(x, y)dl$ в даному випадку застосовується формула

$$\int_{\Gamma} f(x,y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+[\rho'(\varphi)]^2}d\varphi.$$

Слід відзначити, що у більшості випадків при обчисленні криволінійного інтеграла як першого так і другого роду не виникає необхідність у зображенні кривої Г на рисунку.

<u>Приклад 1.</u> Обчислити криволінійний інтеграл $\int_{\Gamma} \frac{9y^2 - x^3}{x^2} dl$, якщо Г – частина кривої $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$, що лежить між точками $A(1, \frac{2}{3})$ та $B(4, \frac{16}{3})$.

Враховуючи, що крива Г задана в декартових координатах явно за допомогою рівняння $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x},\ x \in [1,4]$, та що $y' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x} = \sqrt{x}$, $\sqrt{1+[y'(x)]^2} = \sqrt{1+x}$, маємо

$$\int_{\Gamma} \frac{9y^2 - x^3}{x^2} dl = \int_1^4 \frac{9\cdot\frac{4}{9}x^3 - x^3}{x^2}\sqrt{1+x}dx = 3\int_1^4 x\sqrt{1+x}dx =$$

$$= \begin{vmatrix} \sqrt{1+x} = t, & dx = 2tdt \\ x = t^2 - 1, & \end{vmatrix} = 6\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} (t^2-1)t^2 dt = 6\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} =$$

$$= 6\left(\frac{25\sqrt{5}}{5} - \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{5} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = 6\left(\frac{10\sqrt{5}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{15}\right) = 20\sqrt{5} - \frac{4\sqrt{2}}{5}.$$

<u>Приклад 2.</u> Обчислити криволінійний інтеграл $\int_{\Gamma} \sqrt[3]{xy^2}dl$, де Г задана рівняннями $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $t \in [0, \frac{3\pi}{4}]$.

В даному випадку крива Г задана параметрично в декартових координатах. Перед застосуванням відповідної формули доцільно спочатку зробити наступні обчислення: $x'(t) = -6\cos^2 x\sin x,\ y'(t) = 6\sin^2 x\cos x$,

$\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}=\sqrt{36\cos^4 t\sin^2 t+36\cos^2 t\sin^4 t}=6|\cos t\sin t|$. Тут вираз $|\cos t\sin t|$ буде додатнім на проміжку $[0,\pi/2]$ та від'ємним при $t\in[\pi/2, 3\pi/4]$. Враховуючи це, та властивість адитивності криволінійного інтеграла першого роду, остаточно одержуємо

$$\int_\Gamma \sqrt[3]{xy^2}\,dl=\int_0^{\pi/2}\sqrt[3]{2\cos^3 t\cdot 4\sin^6 t}\cdot 6\cos t\sin t\,dt-$$

$$-\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\sqrt[3]{2\cos^3 t\cdot 4\sin^6 t}\cdot 6\cos t\sin t\,dt==12\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin^3 t\,dt-$$

$$-12\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\cos^2 t\sin^3 t\,dt=\left|\begin{matrix}\cos t=z, & \sin^2 t=1-z^2\\ \sin t\,dt=-dz, & \end{matrix}\right|=-12\int_1^0 z^2(1-z^2)dz+$$

$$+12\int_0^{-\sqrt{2}/2} z^2(1-z^2)dz=-12\left(\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}\right)\Bigg|_1^0+12\left(\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}\right)\Bigg|_0^{-\sqrt{2}/2}=12\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+$$

$$+12\left(-\frac{\sqrt{2}}{12}+\frac{\sqrt{2}}{40}\right)=\frac{24}{15}-\frac{7\sqrt{2}}{10}=\frac{48-21\sqrt{2}}{30}.$$

<u>Приклад 3.</u> Обчислити криволінійний інтеграл $\int_\Gamma \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dl$, якщо крива Γ задана в полярних координатах рівнянням $\rho=2(1+\sin\varphi)$, $\varphi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

Як і в попередніх прикладах, спочатку виконуємо допоміжні обчислення: $\rho'(\varphi)=2\cos\varphi$, $\sqrt{\rho^2(\varphi)+[\rho'(\varphi)]^2}=$

$$=\sqrt{4(1+2\sin\varphi+\sin^2\varphi)+4\cos^2\varphi}=2\sqrt{2}\sqrt{1+\sin\varphi},$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{[2(1+\sin\varphi)\cos\varphi]^2+[2(1+\sin\varphi)\sin\varphi]^2}=2(1+\sin\varphi).$$

Після цього застосовуємо відповідну формулу

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dl=2\sqrt{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{2(1+\sin\varphi)\cos\varphi}{2(1+\sin\varphi)}\sqrt{1+\sin\varphi}d\varphi=$$

$$=2\sqrt{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1+\sin\varphi}\cos\varphi d\varphi=2\sqrt{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1+\sin\varphi}d(1+\sin\varphi)=$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}(1+\sin\varphi)^{3/2}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(2^{3/2}\right)=\frac{16}{3}.$$

3. Криволінійний інтеграл другого роду та його властивості

Нехай в кожній точці гладкої плоскої орієнтованої кривої $\Gamma=\overset{\frown}{AB}$ визначена деяка векторна функція $\overline{F}(x,y)=P(x,y)\overline{i}+Q(x,y)\overline{j},\ (x,y)\in\Gamma$. Позначимо через $\overline{\tau}=\overline{\tau}(x,y)$ одиничний вектор, що лежить на дотичній до Г в точці $(x,y)\in\Gamma$ і напрямок якого узгоджено з орієнтацією кривої Г (рис. 22).

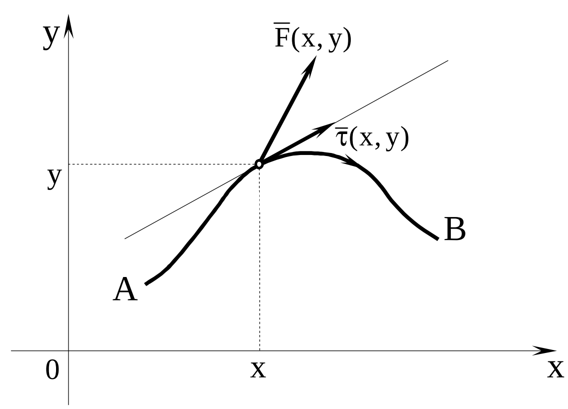

Рис. 22

Утворимо скалярний добуток $\overline{F}(x,y)\cdot\overline{\tau}(x,y)$, що буде неперервною функцією на Г при умові неперервності компонент $P(x,y),\ Q(x,y)$ вектора $\overline{F}(x,y)$ на цій гладкій кривій.

Криволінійний інтеграл першого роду такого спеціального вигляду

$$\int_{\Gamma} \overline{F}(x,y)\cdot\overline{\tau}(x,y)dl$$

і називається ***криволінійним інтегралом другого роду*** від векторної функції $\overline{F}(x,y)$ по орієнтованій кривій Г. Для нього використовують також позначення $\int_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, що зручно при його обчисленні.

Властивості криволінійного інтеграла другого роду

Вкажемо лише ті властивості, якими даний інтеграл відрізняється від криволінійного інтеграла першого роду. При цьому компоненти $P(x,y)$, $Q(x,y)$ вектора $\overline{F}(x,y)$ вважаються інтегрованими на відповідних гладких (або кусочно гладких) кривих.

a) При зміні орієнтації кривої $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$ знак криволінійного інтеграла другого роду міняється на протилежний, тобто $\int_{\overset{\frown}{AB}} \overline{F}(x,y)\cdot\overline{\tau}(x,y)dl = -\int_{\overset{\frown}{BA}} \overline{F}(x,y)\cdot\overline{\tau}(x,y)dl$,

b) Якщо $\overset{\frown}{AB}$ є відрізком прямої, паралельної осі OY, то $\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx = 0$,

c) Якщо $\overset{\frown}{AB}$ є відрізком прямої, паралельної осі OX, то $\int_{\overset{\frown}{AB}} Q(x,y)dy = 0$.

4. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду

a) Крива явно задана у декартових координатах.

Нехай гладка крива $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$ задана в декартових координатах явно за допомогою рівняння $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, причому $A = A(a, y(a))$, $B = B(b, y(b))$, тобто напрямок зростання аргументу x збігається з напрямком орієнтації Г. В цьому випадку для обчислення криволінійного інтеграла другого роду $\int_{\Gamma} \overline{F}(x,y)\cdot\overline{\tau}(x,y)dl = \int_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ застосовується формула

$$\int_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{a}^{b} [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)]dx .$$

b) Крива параметрично задана у декартових координатах.

Нехай гладка крива $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$ задана в декартових координатах параметрично за допомогою рівнянь

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

причому $A = A(x(\alpha, y(\alpha)),\ B = B(x(\beta, y(\beta))$.

В цьому випадку $\int_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t),y(t))x'(t) +$

$$+ Q(x(t),y(t))y'(t)]dt .$$

Дана формула узагальнюється і на випадок просторової кривої $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$, що задається параметрично рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \quad A = A(x(\alpha, y(\alpha), z(\alpha)), \quad B = B(x(\beta, y(\beta), z(\beta)). \\ z = z(t), \end{cases}$$

Для такої кривої, на якій визначена векторна функція трьох змінних $\overline{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z),\ (x,y)\overline{k}$, маємо

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) +$$

$$+ Q(x(t),y(t),z(t))\overline{y}(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt.$$

Нарешті відзначимо, що коли Г є замкненою гладкою чи кусочно гладкою плоскою кривою (контуром) на площині XOY, то при обчисленні

$\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ завжди вважають (коли не вказано інше), що напрямок орієнтації Г протилежний до напрямку руху годинникової стрілки.

Приклад 4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{\Gamma} \frac{ydx}{\sqrt[3]{x^2}} + (3x^2 - y)dy$, якщо $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$ – частина кривої $y = x^2$ від точки $A(-1,1)$ до точки $B(-2,4)$.

Тут $x \in [-2,-1]$ і отже напрямок зростання аргументу x протилежний напрямку орієнтації кривої Г, тому при обчисленні даного інтеграла слід або поміняти його знак на протилежний (залишаючи межами інтегрування значення від -2 до -1), або за нижню та верхню межі інтегрування взяти відповідно числа -1 та -2, що простіше узгоджується з орієнтацією Г. Отже, маємо

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{ydx}{\sqrt[3]{x^2}} + (3x^2 - y)dy = \int\limits_{-1}^{-2} \left[\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2}} + (3x^2 - x^2)2x \right] dx = \int\limits_{-1}^{-2} \left[x^{\frac{4}{3}} + 4x^3 \right] dx =$$

$$= \left(\frac{3x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{7} + x^4 \right) \Bigg|_{-1}^{-2} = \frac{-12\sqrt[3]{2}}{7} + 16 + \frac{3}{7} - 1 = \frac{102 - 12\sqrt[3]{2}}{7}.$$

Приклад 5. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_{\Gamma} xydx - (x - y)dy$, якщо замкнений контур Г є еліпсом $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Так як при $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ дане рівняння еліпса перетворюється в тотожність $\frac{9\cos^2 t}{9} + \frac{4\sin^2 t}{4} \equiv 1$, то рівняння

$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

будуть параметричними рівняннями цього еліпса. Напрямком орієнтації Γ вважаємо напрямок, протилежний до напрямку руху годинникової стрілки. Він відповідає напрямку зростання параметра t від 0 до 2π (рис. 23), тому

$$\oint_{\Gamma} xydx-(x-y)dy=\int_0^{2\pi}[6\cos t\sin t(-3\sin t)-(3\cos t-2\sin t)2\cos t]dt=$$

$$=-18\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,d(\sin t)-6\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt+4\int_0^{2\pi}\sin t\,d(\sin t)=-18\left.\frac{\sin^3 t}{3}\right|_0^{2\pi}-$$

$$-3\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt+2\sin^2 t\Big|_0^{2\pi}=0-3\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}+0=-6\pi.$$

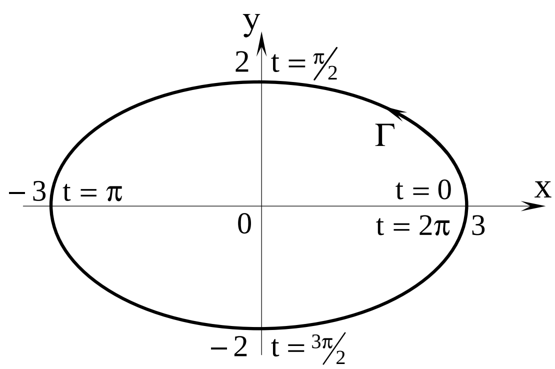

Рис. 23

5. *Формула Гріна та її наслідки*

Нехай у деякій області D функції $P=P(x,y)$, $Q=Q(x,y)$ є неперервними разом із частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тоді для довільного замкненого, кусочно гладкого, орієнтованого в напрямку проти руху годинникової стрілки контура Γ, що повністю лежить в області D і обмежує однозв'язну область G, має місце наступна формула, яка називається ***формулою Гріна***

$$\int_{\Gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

В деяких випадках обчислення криволінійного інтеграла другого роду через подвійний інтеграл за допомогою цієї формули є простішим, ніж безпосереднє його обчислення. Крім цього, відзначимо ще кілька наслідків, які випливають з формули Гріна та мають вагоме прикладне значення.

1. Умова $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, $(x, y) \in D$ є необхідною і достатньою для того, щоб $\oint\limits_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ для довільного кусочно гладкого замкненого контура Γ, який повністю лежить в D.
2. Умова $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, $(x, y) \in D$ є необхідною і достатньою для того, щоб $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не залежав від шляху інтегрування, тобто від вигляду кусочно гладкої орієнтованої кривої $\overset{\frown}{AB}$, яка повністю лежить в D, а залежав лише від точок $A, B \in D$. При виконанні даної умови для позначення криволінійного інтеграла другого роду використовують також символ $\int\limits_{A}^{B} P(x, y) + Q(x, y)dy$.
3. Умова $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, $(x, y) \in D$ є необхідною і достатньою для того, щоб в області D існувала така функція $u = u(x, y)$, яка має неперервні частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, причому $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$ для всіх $(x, y) \in D$. В цьому випадку $\int\limits_{A}^{B} P(x, y) + Q(x, y)dy = u(B) - u(A)$, де сама функція $u = u(x, y)$ знаходиться як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \end{cases}$$ з точністю до довільної сталої C наступним чином.

Спочатку інтегруємо з точністю до довільної функції $\varphi(y)$ перше рівняння $u(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y)$. Після цього знайдену функцію $u(x, y)$ підставляємо у друге рівняння

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x, y)dx\right) + \varphi'(y) = Q(x, y),\ \ \varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x, y)dx\right).$$

Останнє рівняння внаслідок виконання умови $\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $(x, y) \in D$ в правій частині містить функцію, залежну лише від y. Інтегруючи його, одержуємо $\varphi(y)$ з точністю до сталого доданка C, який можна взяти рівним нулю так як вираз $u(B) - u(A)$ не залежить від цього доданка.

4. Для довільного кусочно гладкого замкненого контура Г, що обмежує однозв’язну область G, має місце рівність $\dfrac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} xdy - ydx = S$. Тут S – площа G.

<u>Приклад 5.</u> Обчислити криволінійний інтеграл

$\oint\limits_{\Gamma} 4xy\sqrt{y}dx - 3x^2(\sqrt{x} - \sqrt{y})dy$, якщо замкнений контур Г утворений частинами ліній $x = 1,\ \ y = 0,\ \ y = x$ (рис. 24).

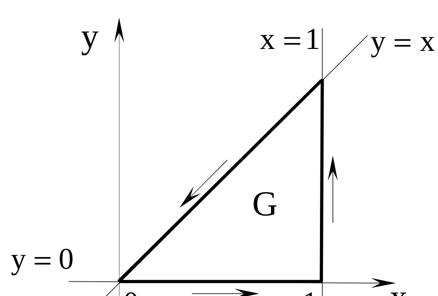

Рис. 24

Тут $P = 4xy\sqrt{y}$, $Q = -3x^2(\sqrt{x} - \sqrt{y})$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 4x\frac{3}{2}\sqrt{y} = 6x\sqrt{y}$,

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -3\cdot\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + 6x\sqrt{y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{15}{2}x^{\frac{3}{2}}$. Застосовуючи формулу Гріна, одержуємо $\oint\limits_{\Gamma} 4xy\sqrt{y}dx - 3x^2(\sqrt{x} - \sqrt{y})dy = -\frac{15}{2}\iint\limits_{G} x^{\frac{3}{2}}dxdy =$

$$= -\frac{15}{2}\int_0^1 dx\int_0^x x^{\frac{3}{2}}dy = -\frac{15}{2}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}y\Big|_0^x dx = -\frac{15}{2}\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}dx = -\frac{15}{2}\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Bigg|_0^1 = -\frac{15}{7}.$$

<u>Приклад 6.</u> Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_{\Gamma}\frac{xdy - ydx}{x^2 + 4y^2}$, якщо замкнений контур Г має рівняння $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 25).

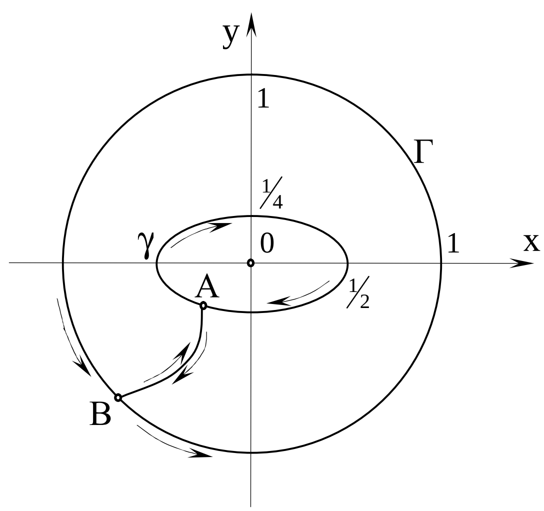

Рис. 25

Функції $P = \frac{-y}{x^2 + 4y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2 + 4y^2}$ неперервні разом із частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-\left(x^2 + 4y^2\right) + 8y^2}{\left(x^2 + 4y^2\right)^2} = \frac{4y^2 - x^2}{\left(x^2 + 4y^2\right)^2}$,

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 + 4y^2 - 2x^2}{\left(x^2 + 4y^2\right)^2} = \frac{4y^2 - x^2}{\left(x^2 + 4y^2\right)^2}$ всюди, крім точки $(0, 0)$. Отже, умова

$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ виконується всюди за винятком цієї точки, що лежить всередині Г. Оточимо точку $(0,0)$ еліпсом γ, що має рівняння $4x^2 + 16y^2 = 1$ та повністю лежить всередині контура Г. Виберемо дві довільні точки $A \in \Gamma$, $B \in \gamma$, які з'єднаємо гладкою кривою $\overset{\frown}{AB}$ (рис. 25). В результаті одержимо замкнений кусочно гладкий контур, що складається з орієнтованого в напрямку проти руху годинникової стрілки контура Г, кривих $\overset{\frown}{AB}$ та $\overset{\frown}{BA}$ і орієнтованого в напрямку за рухом годинникової стрілки контура γ. Побудований таким чином контур не містить точки $(0,0)$, тому, враховуючи наслідки формули Гріна та властивість адитивності криволінійного інтеграла, будемо мати

$$\oint_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + 4y^2} + \int_{\overset{\frown}{BA}} \frac{xdy - ydx}{x^2 + 4y^2} - \oint_{\gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + 4y^2} + \int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{xdy - ydx}{x^2 + 4y^2} = 0, \text{ або}$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + 4y^2} = \oint_{\gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + 4y^2}.$$

Інтеграл у правій частині одержаної рівності обчислюється безпосередньо, записуючи рівняння γ у параметричному вигляді. Маємо

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t, \\ y = \frac{1}{4}\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi], \quad \oint_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + 4y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{8}\cos^2 t + \frac{1}{8}\sin^2 t}{\frac{1}{4}\cos^2 t + \frac{1}{4}\sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dt = \pi.$$

__Приклад 7.__ Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int_{(-1,1)}^{(2,8)} (3y\sqrt[3]{y} - 10x)dx + 4(x\sqrt[3]{y} + 1)dy$$

попередньо переконавшись, що він не залежить від шляху інтегрування.

Дійсно, маємо $P = 3y\sqrt[3]{y} - 10x$, $Q = 4(x\sqrt[3]{y} + 1)$,

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 3 \cdot \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{y} = 4\sqrt[3]{y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 4\sqrt[3]{y}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ при всіх $x, y \in R$, а отже даний інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Знаходимо функцію $u = u(x, y)$ як розв'язок системи $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3y\sqrt[3]{y} - 10x, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 4(x\sqrt[3]{y} + 1), \end{cases}$ після чого обчислюємо даний інтеграл. Послідовно одержуємо

$$u = \int (3y\sqrt[3]{y} - 10x)dx + \varphi(y) = 3xy\sqrt[3]{y} - 5x^2 + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x\frac{4}{3}\sqrt[3]{y} + \varphi'(y) = 4x\sqrt[3]{y} + \varphi'(y), \ \ 4x\sqrt[3]{y} + \varphi'(y) = 4(x\sqrt[3]{y} + 1),$$

$$\varphi'(y) = 4, \ \ \varphi(y) = 4y + C, \ \ C = 0, \ \ u = 3xy\sqrt[3]{y} - 5x^2 + 4y,$$

$$\int\limits_{(-1,1)}^{(2,8)} (3y\sqrt[3]{y} - 10x)dx + 4(x\sqrt[3]{y} + 1)dy = u(2,8) - u(-1,1) =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 2 - 20 + 32 - (-3 - 5 + 4) = 96 + 12 + 4 = 112.$$

Приклад 7. Обчислити площу фігури, що обмежена кривою $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^{12} = xy$.

Ця крива визначена при $x \geq 0$, $y \geq 0$. Крім того, вигляд рівняння даної кривої не міняється при заміні x на y і y на x, тому вона симетрична відносно прямої $y = x$. При $x = \dfrac{\sqrt{t}}{(1+t)^3}$, $y = \dfrac{t^2\sqrt{t}}{(1+t)^3}$, $t \geq 0$ рівняння даної кривої перетворюється в тотожність, отже рівняння

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{t}}{(1+t)^3}, \\ y = \dfrac{t^2\sqrt{t}}{(1+t)^3}, \end{cases} \quad t \geq 0,$$

є параметричними рівняннями кривої $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^{12} = xy$. Досліджуючи функції $x=\dfrac{\sqrt{t}}{(1+t)^3}$, $y=\dfrac{t^2\sqrt{t}}{(1+t)^3}$, $t\ge 0$ за допомогою похідних $x'=\dfrac{1-5t}{2\sqrt{t}(1+t)^4}$, $y'=\dfrac{t^2(5-t)}{2\sqrt{t}(1+t)^4}$ приходимо до висновку, що $x(t)$ зростає на проміжку $(0,\frac{1}{5})$ від значення $x(0)=0$ до значення $x(\frac{1}{5})=\dfrac{25\sqrt{5}}{216}$, а на проміжку $(\frac{1}{5},+\infty)$ спадає від $x(\frac{1}{5})=\dfrac{25\sqrt{5}}{216}$ до значення $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\sqrt{t}}{(1+t)^3}=0$. Аналогічно, $y(t)$ зростає на проміжку $(0,5)$ від значення $y(0)=0$ до значення $y(5)=\dfrac{25\sqrt{5}}{216}$, а на проміжку $(5,+\infty)$ спадає від $y(5)=\dfrac{25\sqrt{5}}{216}$ до значення $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^2\sqrt{t}}{(1+t)^3}=0$. Так як $x(t)\equiv y\left(\dfrac{1}{t}\right)$, то звідси випливає, що точки $(x(t),y(t))$, $\left(x\left(\dfrac{1}{t}\right),y\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)$ симетричні при всіх $t\in[0,+\infty)$ відносно прямої $y=x$. На цій прямій лежать лише дві точки – $(0,0)$ при $t=0$ та $(\frac{1}{8},\frac{1}{8})$ при $t=1$. Всі точки при $t\in(0,\frac{1}{5})$ лежать нижче точок при $t\in(\frac{1}{5},+\infty)$. Враховуючи всі ці висновки,

будуємо графік кривої $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^{12}=xy$ (рис. 26)

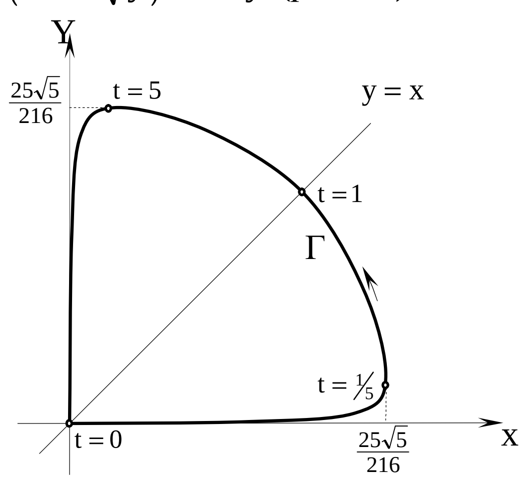

Рис. 26

та обчислюємо площу фігури

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma}xdy-ydx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{t}}{(1+t)^3}\cdot\frac{t^2(5-t)}{2\sqrt{t}(1+t)^4}-\frac{t^2\sqrt{t}}{(1+t)^3}\cdot\frac{1-5t}{2\sqrt{t}(1+t)^4}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{t^2(5-t-1+5t)}{(1+t)^7}dt=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t)^6}dt=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{t^2-1+1}{(1+t)^6}dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\frac{t-1}{(1+t)^5}+\frac{1}{(1+t)^6}\right)dt=\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\frac{t+1-2}{(1+t)^5}+\frac{1}{(1+t)^6}\right)dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(1+t)^4}-\frac{2}{(1+t)^5}+\frac{1}{(1+t)^6}\right)dt=$$

$$=\left(-\frac{1}{3(1+t)^3}+\frac{1}{2(1+t)^4}-\frac{1}{5(1+t)^5}\right)\Bigg|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{10-15+6}{30}=\frac{1}{30}.$$

РОЗДІЛ III. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

1. Поверхневий інтеграл першого роду та його властивості

Розглянемо деяку поверхню Ω, що описується рівнянням $z=z(x,y)$, $(x,y)\in D$. Область D є проекцією Ω на координатну площину XOY (рис. 27), вважається, що вона має площу.

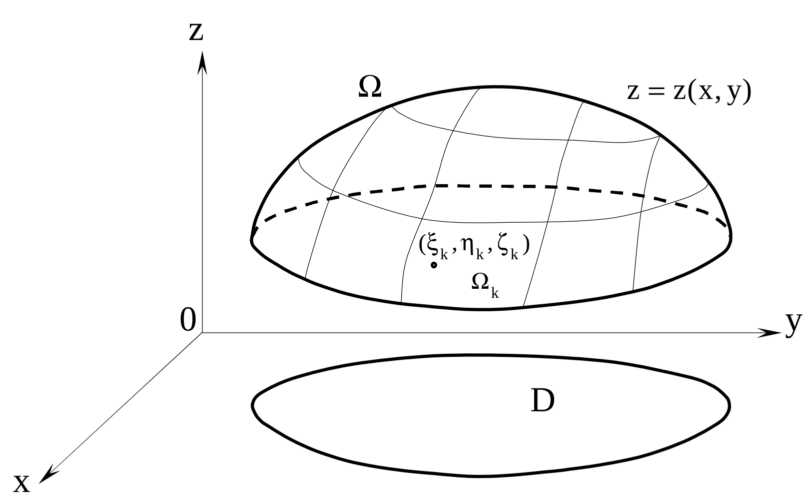

Рис. 27

Поверхня Ω називається гладкою, якщо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ неперервні в області D. Ця ж поверхня буде орієнтованою, якщо вибрана одна з двох її сторін. Якщо не гладка поверхня Ω складається із скінченної кількості гладких поверхонь, то вона називається кусочно гладкою. Поверхня Ω називається замкненою, якщо вона є границею деякої замкненої обмеженої однозв'язної області G в просторі.

Нехай на Ω визначена деяка функція $f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Omega$. Розіб'ємо довільним чином Ω на n частинних поверхонь Ω_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, кожна з яких має площу $\Delta\sigma_k$ та виберемо в кожній з них довільно точки $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \Omega_k$ (рис 27). Утворимо суму виду $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta\sigma_k$, яка називається ***інтегральною сумою***, складеною для функції $f(x, y, z)$ при даному розбитті Ω на Ω_k та при даному виборі точок $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \Omega_k$. Введемо позначення $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n}\{d_k\}$, де d_k визначається формулою

$$d_k = \sup_{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \Omega_k} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

та називається ***діаметром*** частинної поверхні Ω_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Якщо існує скінченна границя при $\lambda \to 0$ утвореної інтегральної суми і ця границя не залежить ні від способу розбиття Ω на Ω_k, ні від способу вибору точок $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \Omega_k$, то ця границя і називається ***поверхневим інтегралом першого роду*** від функції $f(x, y, z)$ по поверхні Ω та позначається символом $\iint\limits_{\Omega} f(x, y, z)d\sigma$. При цьму кажуть, що $f(x, y, z)$ є ***інтегрованою*** на Ω. Отже згідно з означенням маємо

$$\iint_{\Omega} f(x,y,z)d\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta\sigma_k .$$

Зауважимо, що коли $f(x,y,z)$ неперервна на гладкій поверхні Ω, що має проекцією замкнену область D, то вона буде і інтегрована на цій поверхні. У випадку, коли Ω – замкнена поверхня, для позначення поверхневого інтеграла першого роду використовується також символ $\oiint_{\Omega} f(x,y,z)d\sigma$.

Властивості поверхневого інтеграла першого роду

Тут всі підінтегральні функції вважаються інтегрованими на відповідних гладких або кусочно гладких поверхнях

a) Значення поверхневого інтеграла першого роду не залежить від орієнтації поверхні,
b) $\iint_{\Omega} dxdy = \sigma$, σ – площа Ω,
c) $\iint_{\Omega} Cf(x,y,z)d\sigma = C\iint_{\Omega} f(x,y,z)d\sigma$, C – стала,
d) $\iint_{\Omega} [f(x,y,z) + g(x,y,z)]d\sigma = \iint_{\Omega} f(x,y,z)d\sigma + \iint_{\Omega} g(x,y,z)d\sigma$,
e) Якщо $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$, то
$$\iint_{\Omega} f(x,y,z)d\sigma = \iint_{\Omega_1} f(x,y,z)d\sigma + \iint_{\Omega_2} f(x,y,z)d\sigma,$$
f) Якщо на поверхні Ω виконується умова $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$, то
$$\iint_{\Omega} f(x,y,z)d\sigma \le \iint_{\Omega} g(x,y,z)d\sigma,$$
g) $\left|\iint_{\Omega} f(x,y,z)d\sigma\right| \le \iint_{\Omega} |g(x,y,z)|d\sigma$.

Властивості c) – d) часто називають властивостями ***лінійності*** поверхневого інтеграла першого роду, а властивість e) – властивістю ***адитивності***.

2. Обчислення поверхневого інтеграла першого роду

Якщо гладка поверхня Ω задана в декартових координатах явно за допомогою рівняння $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, то тоді для обчислення поверхневого інтеграла першого роду $\iint\limits_{\Omega} f(x, y, z)d\sigma$ застосовується формула

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y, x)d\sigma = \iint\limits_{D} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy.$$

__**Приклад 1.**__ Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\Omega} \frac{d\sigma}{x^2 + y^2 + z^2}$, якщо Ω – частина поверхні $y = -\sqrt{4 - x^2}$, що обмежена площинами $z = 0$, $z = 3$.

Зпроектуємо Ω, яка є частиною (при $-2 \le y \le 0$) половини циліндра $x^2 + y^2 = 9$, на координатну площину XOZ (рис. 28).

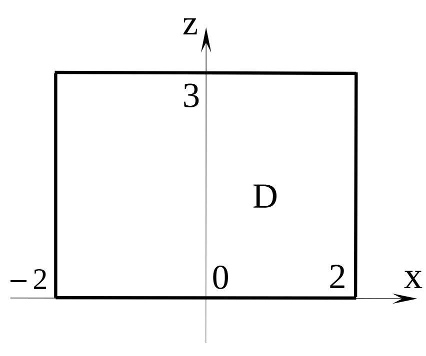

Рис. 28

Проекцією буде область D у вигляді прямокутника, обмеженого прямими $x = -2$, $x = 2$, $z = 0$, $z = 3$. Тому відповідно до формул для обчислення поверхневого інтеграла першого роду та подвійного інтеграла маємо

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{d\sigma}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{D}\frac{1}{x^2+4-x^2+z^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}},\ \ \frac{\partial y}{\partial x}=0,\ \ \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{4-x^2}},$$

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{d\sigma}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{D}\frac{1}{4+z^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dxdz=2\int\limits_0^3\frac{dz}{4+z^2}\cdot\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{2}\Big|_0^3\cdot\arcsin\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2}=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\pi\operatorname{arctg}\frac{3}{2}.$$

3. Поверхневий інтеграл другого роду та його властивості

Нехай в кожній точці гладкої орієнтованої поверхні Ω визначена деяка векторна функція $\overline{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\overline{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+R(x,y,z)$, $(x,y,z)\in\Omega$. Позначимо через $\overline{n}=\overline{n}(x,y,z)$ одиничний вектор, що лежить на нормалі до Ω в точці $(x,y,z)\in\Omega$ і напрямок якого узгоджено з орієнтацією поверхні Ω таким чином, що вибрану сторону цієї поверхні видно з кінця вектора $\overline{n}$ (на рис. 29 вибрано верхню сторону Ω).

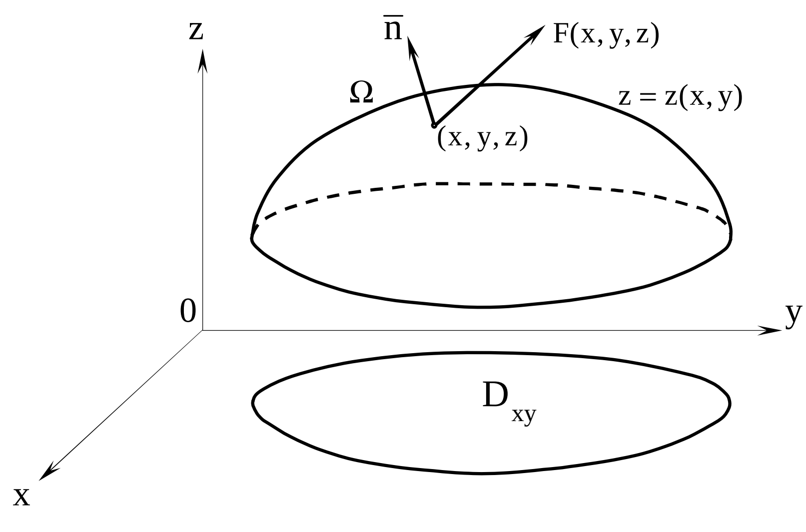

Рис. 29

Утворимо скалярний добуток $\overline{F}(x,y,z)\cdot\overline{n}(x,y,z)$, що буде неперервною функцією на Ω при умові неперервності компонент $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ вектора $\overline{F}(x,y,z)$ на цій гладкій поверхні.

Поверхневий інтеграл першого роду такого спеціального вигляду

$$\iint\limits_{\Omega}\overline{F}(x,y,z)\cdot\overline{n}(x,y,z)d\sigma$$

і називається ***поверхневим інтегралом другого роду*** від векторної функції $\overline{F}(x,y,z)$ по орієнтованій поверхні Ω. Для нього використовують також позначення $\iint\limits_{\Omega}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy$, що зручно при його обчисленні.

Властивості поверхневого інтеграла другого роду

Вкажемо лише ті властивості, якими даний інтеграл відрізняється від поверхневого інтеграла першого роду. При цьому компоненти $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ вектора $\overline{F}(x,y,z)$ вважаються інтегрованими на відповідних гладких (або кусочно гладких) поверхнях.

a) Значення поверхневого інтеграла першого роду змінює свій знак на протилежний при зміні орієнтації поверхні,
b) Якщо Ω є циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі OX, то $\iint\limits_{\Omega}P(x,y,z)dydz=0$,
c) Якщо Ω є циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі OY, то $\iint\limits_{\Omega}Q(x,y,z)dxdz=0$,
d) Якщо Ω є циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі OZ, то $\iint\limits_{\Omega}R(x,y,z)dxdy=0$.

4. Обчислення поверхневого інтеграла другого роду

Якщо гладка поверхня Ω задана в декартових координатах явно за допомогою рівняння $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, D_{xy} – проекція Ω на координатну площину XOY (рис. 29), то тоді для обчислення поверхневого інтеграла другого роду $\iint\limits_{\Omega} R(x, y, z)dxdy$ застосовується формула

$$\iint\limits_{\Omega} R(x, y, z)dxdy = \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy,$$

де знак "+" береться в тому випадку, коли $\overline{n}(x, y, z)$ та вісь OZ утворюють гострий кут (так як на рис. 29). Знак "–" береться в іншому випадку. Аналогічно

$$\iint\limits_{\Omega} P(x, y, z)dydz = \pm \iint\limits_{D_{xy}} P(x(y, z), y, z)dydz,$$

$$\iint\limits_{\Omega} Q(x, y, z)dxdz = \pm \iint\limits_{D_{xz}} P(x, y(x, z), z)dxdz$$

у випадках, коли Ω задається в декартових координатах явно за допомогою рівнянь $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$ та $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$ відповідно. При цьому D_{yz}, D_{xz} – проекції Ω на координатні площини YOZ та XOZ.

Якщо гладка (або кусочно гладка) поверхня Ω – замкнена, то в деяких випадках ефективнішим при обчисленні поверхневого інтеграла другого роду є застосування наступної формули, відомої як ***формула Остроградського***

$$\oiint\limits_{\Omega}\overline{F}(x,y,z)\cdot\overline{n}(x,y,z)d\sigma=\iiint\limits_{G}div\overline{F}(x,y,z)dxdydz.$$

Тут $div\overline{F}(x,y,z)=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$ – ***дивергенція*** вектора $\overline{F}(x,y,z)$, G – область у просторі, що обмежена замкненою поверхнею Ω, орієнтація Ω визначається як її зовнішня сторона ($\overline{n}(x,y,z)$ направлена назовні Ω).

Приклад 2. Обчислити поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_{\Omega}x\sqrt{z-y^2}dydz-\frac{y^2}{\sqrt{z}}dxdz+\sqrt{z}(x+y)dxdy,$$

якщо Ω – нижня сторона частини поверхні $z=x^2+y^2$, обмеженої площинами $x=0$, $y=0$, $z=1$ (перший октант).

Поверхня Ω зображена на рис. 30.

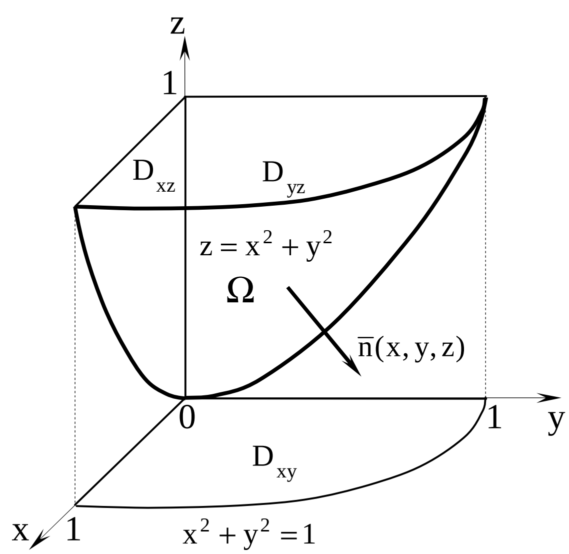

Рис. 30

На ньому через D_{xy}, D_{xz}, D_{yz} позначені проекції Ω на координатні площини XOY, XOZ, YOZ відповідно. В областях D_{xy}, D_{xz}, D_{yz} дана поверхня Ω задається рівняннями $z=x^2+y^2$, $y=\sqrt{z-x^2}$, $x=\sqrt{z-y^2}$, крім того, вектор $\overline{n}(x, y, z)$, напрямок якого узгоджено з вибраною стороною Ω, утворює гострі кути з осями OX, OY та тупий кут з віссю OZ. Враховуючи це, згідно з формулами для обчислення поверхневого інтеграла другого роду, одержуємо

$$\iint_{\Omega} x\sqrt{z-y^2}dydz - \frac{y^2}{\sqrt{z}}dxdz + \sqrt{z}(x+y)dxdy = \iint_{D_{yz}} \sqrt{z-y^2}\sqrt{z-y^2}dydz -$$

$$-\iint_{D_{xz}} \frac{z-x^2}{\sqrt{z}}dxdz - \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2+y^2}(x+y)dxdy.$$

Обчислюємо тепер подвійні інтеграли, переходячи в останньому до полярних координат

$$\iint_{\Omega} x\sqrt{z-y^2}dydz - \frac{y^2}{\sqrt{z}}dxdz + \sqrt{z}(x+y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 (z-y^2)dz -$$

$$-\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \left(\sqrt{z} - \frac{x^2}{\sqrt{z}}\right)dz - \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho \cdot \rho(\cos\varphi + \sin\varphi)\rho d\rho = \int_0^1 \left(\frac{z^2}{2} - y^2 z\right)\Bigg|_{y^2}^1 dy -$$

$$-\int_0^1 \left(\frac{2z\sqrt{z}}{3} - 2x^2\sqrt{z}\right)\Bigg|_{x^2}^1 dx - (\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - y^2 - \frac{y^4}{2} + y^4\right)dy - \int_0^1 \left(\frac{2}{3} - 2x^2 - \frac{2x^3}{3} + 2x^3\right)dx - (1+1)\cdot\frac{1}{4} =$$

$$= \left(\frac{y}{2} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{10}\right)\Bigg|_0^1 - \left(\frac{2x}{3} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{3}\right)\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{17}{30}.$$

Приклад 3. Обчислити поверхневий інтеграл

$$\iint_{\Omega} xy^2dxdy - (3yx^2 + y^3)dydz + zx^2dxdy,$$

де Ω – нижня сторона частини поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, що обмежена циліндром $x^2 + y^2 = 4$.

Поверхня $z=\sqrt{x^2+y^2}$ є верхньою частиною конуса $z^2=x^2+y^2$, твірні якої нахилені під кутом $\pi/4$ до координатної площини XOY. Так як вибрана нижня сторона поверхні Ω, то нормаль $\overline{n}(x,y,z)$ до неї утворюватиме з віссю OZ тупий кут (рівний $3\pi/4$) Додамо до орієнтованої поверхні Ω верхню сторону поверхні Ω^*, що є частиною площини $z=2$, вирізаної тим же циліндром $x^2+y^2=4$. Утворена таким чином поверхня $\Omega\cup\Omega^*$ буде замкненою, у якої вибрана зовнішня сторона і яка обмежує область область G у просторі, що має проекцією D_{xy} на площині XOY. Проекція D_{xy} обмежена колом $x^2+y^2=4$, яка є напрямною циліндра з тим же рівнянням $x^2+y^2=4$ (рис. 31).

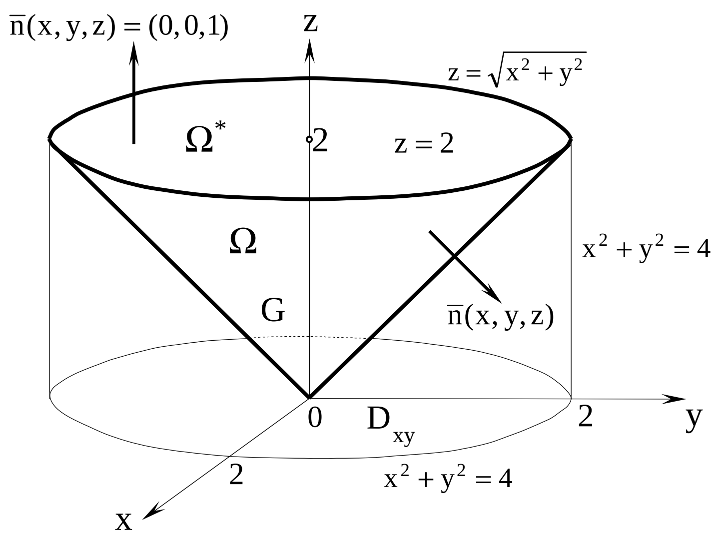

Рис. 31

В даному випадку $\overline{F}(x,y,z)=xy^2\overline{i}-(3yx^2+y^3)\overline{j}+zx^2\overline{k}$, $\operatorname{div}\overline{F}(x,y,z)=$ $=y^2-3x^2-3y^2+x^2=-2x^2-2y^2$, тому на основі властивості адитивності поверхневого інтеграла другого роду, формули Остроградського, та переходячи в подвійних інтегралах до полярних координат, одержуємо $\iint\limits_{\Omega} xy^2dydz-(3yx^2+y^3)dxdz+zx^2dxdy=$

$$= \iint_{\Omega} \overline{F}(x,y,z)\cdot\overline{n}(x,y,z)d\sigma = \oiint_{\Omega\cup\Omega^*} \overline{F}(x,y,z)\cdot\overline{n}(x,y,z)d\sigma -$$

$$- \iint_{\Omega^*} \overline{F}(x,y,z)\cdot\overline{n}(x,y,z)d\sigma = \iiint_G \operatorname{div}\overline{F}(x,y,z)dxdydz - \iint_{D_{xy}} 2x^2dxdy =$$

$$= -2\iiint_G (x^2+y^2)dxdydz - 2\iint_{D_{xy}} x^2dxdy = -2\iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} dz -$$

$$-2\iint_{D_{xy}} x^2dxdy = -2\iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy - 2\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\int_0^2 \rho^2\rho d\rho =$$

$$= -2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^2 \rho^2(2-\rho)\rho d\rho - \int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi\cdot\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^2 = -4\pi\left.\left(\frac{2\rho^4}{4}-\frac{\rho^5}{5}\right)\right|_0^2 -$$

$$-4\left.\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\right|_0^{2\pi} = -4\pi\left(8-\frac{32}{5}\right) - 8\pi = -40\pi + \frac{128\pi}{5} = -\frac{72\pi}{5}.$$

РОЗДІЛ IV. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

I. Змінитити порядок інтегрування у повторних інтегралах

1. $\int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y)dy + \int_2^8 dx \int_{\frac{x}{2}}^{4} f(x,y)dy$,

2. $\int_{-1}^0 dy \int_{-3y}^{3} f(x,y)dx + \int_0^6 dy \int_{\frac{y}{2}}^{3} f(x,y)dx$,

3. $\int_{-4}^0 dx \int_0^{\sqrt{x+4}} f(x,y)dy + \int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$,

4. $\int_0^1 dy \int_0^{y} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{1-\sqrt{y-1}} f(x,y)dx$,

5. $\int_0^1 dx \int_{-x}^{0} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_{-1+\sqrt{4x-x^2-3}}^{0} f(x,y)dy$,

6. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{0} dy \int\limits_{0}^{y+\sqrt{2}} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$,

7. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1}^{2x+1} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{1}^{\frac{3}{x}} f(x,y)dy$,

8. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{3-2y}^{3} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{1}^{\frac{3}{y}} f(x,y)dx$,

9. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1}^{2-\sqrt{1-x}} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{1}^{\frac{2}{x}} f(x,y)dy$,

10. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{4} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2} f(x,y)dx$,

11. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dy$,

12. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{1-\sqrt{-y}} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{1} f(x,y)dx$,

13. $\int\limits_{-6}^{-3} dx \int\limits_{-3}^{\frac{x}{2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-3}^{0} dx \int\limits_{x}^{\frac{x}{2}} f(x,y)dy$,

14. $\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{-2}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{-2}^{-\frac{y}{2}} f(x,y)dx$,

15. $\int\limits_{-4}^{-3} dx \int\limits_{-\sqrt{x+4}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-3}^{0} dx \int\limits_{\frac{x}{3}}^{0} f(x,y)dy$,

16. $\int_{0}^{1} dy \int_{-y}^{0} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)dx$,

17. $\int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{\sqrt{2-x^2}}^{2-x} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{2}}^{2} dx \int_{0}^{2-x} f(x,y)dy$,

18. $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{3y-3} f(x,y)dx + \int_{1}^{3} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{0} f(x,y)dx$,

19. $\int_{-2}^{-1} dx \int_{1}^{-\frac{2}{x}} f(x,y)dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{x+2}^{2} f(x,y)dy$,

20. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{\frac{2}{y}}^{-1} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{y-1}^{-1} f(x,y)dx$,

21. $\int_{0}^{1} dx \int_{2-2x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{1}^{2} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$,

22. $\int_{0}^{1} dy \int_{1}^{2-\sqrt{1-y}} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{1}^{\frac{2}{y}} f(x,y)dx$,

23. $\int_{0}^{1} dx \int_{3-3x}^{3-x} f(x,y)dy + \int_{1}^{3} dx \int_{0}^{3-x} f(x,y)dy$,

24. $\int_{0}^{1} dy \int_{1}^{1+y^2} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{y}^{2} f(x,y)dx$,

25. $\int_{-3}^{-1} dx \int_{-x}^{3} f(x,y)dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{-3x} f(x,y)dy$,

26. $\int_{-\sqrt{2}}^{0} dy \int_{0}^{y+\sqrt{2}} f(x,y)dx + \int_{0}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$,

27. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-x-1}^{-1} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-\frac{2}{x}}^{-1} f(x,y)dy,$

28. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{1-\sqrt{-y}} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{1} f(x,y)dx,$

29. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{1}^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_{2}^{5} dx \int\limits_{x-1}^{4} f(x,y)dy,$

30. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{1} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{\sqrt{y-1}}^{1} f(x,y)dx.$

II. Обчислити подвійний інтеграл

1. $\iint\limits_{D} xy^2 dxdy$

$D:\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x},\ x = 1$

2. $\iint\limits_{D} (2x - 3y)dxdy$

$D:\ xy = -6,\ x - y = 7$

3. $\iint\limits_{D} (x + y)dxdy$

$D:\ y = x^2,\ y = x$

4. $\iint\limits_{D} (x - 2y)dxdy$

$D:\ y = x - 1,\ y = 2x,\ x = 0$

5. $\iint\limits_{D} y\cos xy dxdy$

$D:\ y = \frac{\pi}{2},\ y = \pi,\ x = 1,\ x = 2$

6. $\iint\limits_{D} 4x^2 \sin xy dxdy$

$D:\ y = 0,\ y = x,\ x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

7. $\iint\limits_{D} xy dxdy$

$D:\ y = -x,\ y = \sqrt[3]{x},\ x = -1$

8. $\iint\limits_{D} (x + y^2)dxdy$

$D:\ y = -x^2,\ y = -1$

9. $\iint\limits_{D} xy dxdy$

$D:\ xy = 3,\ x + y = -4$

10. $\iint\limits_{D} (y - 3x)dxdy$

$D:\ y = x + 1,\ y = 2x - 1,\ x = 3$

11. $\iint\limits_D 4ye^{2xy}dxdy,\quad D:\ x=\frac{1}{2},$

$x=1,\ \ y=\ln 3,\ \ y=\ln 4,$

12. $\iint\limits_D x^2 e^{-\frac{xy}{2}}dxdy$

$D:\ y=0,\ \ y=x,\ \ x=\sqrt{2}$

13. $\iint\limits_D x^2 ydxdy$

$D:\ y=\sqrt{x},\ \ y=-x^2,\ \ x=1$

14. $\iint\limits_D \left(x^2+y\right)dxdy$

$D:\ y=x^2,\ \ y=-x$

15. $\iint\limits_D (x+y)dxdy$

$D:\ xy=4,\ \ x+y=5$

16. $\iint\limits_D x^2 ydxdy$

$D:\ y=x^2,\ \ y=x+2$

17. $\iint\limits_D 12y\sin 2xydxdy$

$D:\ y=\frac{\pi}{4},\ \ y=\frac{\pi}{2},\ \ x=3,\ \ x=2$

18. $\iint\limits_D x^2\cos xydxdy$

$D:\ y=0,\ \ y=x,\ \ x=\sqrt{\pi}$

19. $\iint\limits_D x^3 ydxdy$

$D:\ y=x,\ \ y=-\sqrt{-x},\ \ x=-1$

20. $\iint\limits_D x^2 y^2 dxdy$

$D:\ y=x^2,\ \ y=1$

21. $\iint\limits_D x^2 ydxdy$

$D:\ xy=-5,\ \ y=x+6$

22. $\iint\limits_D xydxdy$

$D:\ y=\frac{x^2}{2},\ \ y=x+4$

23. $\iint\limits_D 8ye^{4xy}dxdy,\quad D:\ x=\frac{1}{4},$

$x=\frac{1}{2},\ \ y=\ln 3,\ \ y=\ln 4,$

24. $\iint\limits_D x^2 e^{-\frac{xy}{4}}dxdy$

$D:\ y=0,\ \ y=x,\ \ x=2$

25. $\iint\limits_D xdxdy$

$D:\ xy=2,\ \ y=1+2x-x^2$

26. $\iint\limits_D x^2 ydxdy$

$D:\ y=-x^2,\ \ y=-\sqrt{-x}$

27. $\iint\limits_D (2-x)dxdy$

$D:\ xy=-2,\ \ y=1-2x-x^2$

28. $\iint\limits_D xy^2 dxdy$

$D:\ y=x^2,\ \ y=\sqrt{x}$

29. $\iint\limits_D y\cos 2xy\,dxdy$

$D:\ y=\frac{\pi}{2},\ y=\frac{3\pi}{2},\ x=\frac{1}{2},\ x=2$

30. $\iint\limits_D 4x^2\sin 2xy\,dxdy$

$D:\ y=0,\ 2y=x,\ x=\sqrt{2\pi}$

III. Обчислити подвійний інтеграл

1. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$D:\ y=\sqrt{2x-x^2},\ y=0$

2. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad D:\ y=0,$

$y=x,\ x^2+y^2=2x-2y,$

3. $\iint\limits_D \frac{xdxdy}{y}$

$D:\ x^2+y^2=2y$

4. $\iint\limits_D \sin\left(x^2+y^2\right)dxdy$

$D:\ y=\sqrt{1-x^2},\ y=0$

5. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$

$D:\ x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=1$

6. $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\quad D:\ y=x,$

$y=\sqrt{1-x^2},\ y=-x,$

7. $\iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$

$D:\ x^2+y^2=1$

8. $\iint\limits_D \frac{xydxdy}{x^2+y^2}$

$D:\ x=-\sqrt{4y-y^2},\ x=0$

9. $\iint\limits_D dxdy$

$D:\ x^2+y^2=4x+4y$

10. $\iint\limits_D \frac{ydxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$D:\ x^2+y^2=-4x$

11. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$

$D:\ x=-\sqrt{4-y^2},\ x=0$

12. $\iint\limits_D ydxdy,\quad D:\ y=0,$

$y=\sqrt{1-x^2},\ y=\sqrt{4-x^2},$

13. $\iint\limits_D y\sqrt{x^2+y^2}dxdy, \quad D: \ y=0,$

$y=-\sqrt{4-x^2}, \ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},$

14. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}$

$D: \ x^2+y^2=4$

15. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{x}, \quad D: \ y=-x,$

$y=x, \ x^2+y^2=4x,$

16. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{36-x^2-y^2}}$

$D: \ y=\sqrt{-6x-x^2}, \ y=0$

17. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{y-x}$

$D: \ x^2+y^2=6y-6x$

18. $\iint\limits_D \dfrac{xdxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$D: \ x^2+y^2=-6y$

19. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}$

$D: \ y=-\sqrt{9-x^2}, \ y=0$

20. $\iint\limits_D xydxdy, \quad D: \ y=0,$

$y=-\sqrt{4-x^2}, \ y=-\sqrt{9-x^2},$

21. $\iint\limits_D xydxdy$

$D: \ x^2+y^2=9$

22. $\iint\limits_D xdxdy, \quad D: \ y=x,$

$x=-\sqrt{9-y^2}, \ y=\sqrt{3}\cdot x,$

23. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}$

$D: \ x^2+y^2=16$

24. $\iint\limits_D \dfrac{x}{y}dxdy$

$D: \ x=\sqrt{-8y-y^2}, \ x=0$

25. $\iint\limits_D \dfrac{x\sqrt{x^2+y^2}dxdy}{(x+y)^2}, \quad D: y=0,$

$y=-x, \quad x^2+y^2=-8x-8y,$

26. $\iint\limits_D \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}dxdy}{x}$

$D: \ x^2+y^2=8x$

27. $\iint\limits_D \sqrt[4]{x^2+y^2}dxdy$

$D: \ x=\sqrt{16-y^2}, \ x=0$

28. $\iint\limits_D xdxdy, \quad D: \ x=0,$

$x=\sqrt{1-y^2}, \ x=\sqrt{9-y^2},$

29. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy, \quad D:\ y=-x,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ x=-\sqrt{16-y^2},$

30. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{y}, \quad D:\ y=0,\ y=x,\ x^2+y^2=6y,$

IV. Обчислити потрійний інтеграл

1. $\iiint\limits_D xdxdydz, \quad D:\ x=1,\ y=10x,\ y=0,\ z=xy,\ z=0,$

2. $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}\right)^4}, \quad D:\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1,$

3. $\iiint\limits_D 15\left(y^2+z^2\right)dxdydz, \quad D:\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=x+y,\ x+y=1,$

4. $\iiint\limits_D (3x+4y)dxdydz, \quad D:\ x=1,\ y=0,\ y=x,\ z=0,\ z=5(x^2+y^2),$

5. $\iiint\limits_D \left(1+2x^3\right)dxdydz, \quad D:\ x=1,\ y=0,\ y=9x,\ z=0,\ z=\sqrt{xy},$

6. $\iiint\limits_D \left(27+54y^3\right)dxdydz, \quad D:\ x=1,\ y=0,\ y=x,\ z=0,\ z=\sqrt{xy},$

7. $\iiint\limits_D ydxdydz, \quad D:\ x=1,\ y=15x,\ y=0,\ z=xy,\ z=0,$

8. $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^5}, \quad D:\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ \frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1,$

9. $\iiint\limits_D \left(3x^2+y^2\right)dxdydz, \quad D:\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=10y,\ x+y=1,$

10. $\iiint\limits_D (15x+30z)dxdydz, \quad D:\ x=1,\ y=0,\ y=x,\ z=0,\ z=x^2+3y^2,$

11. $\iiint\limits_D \left(4+8z^3\right)dxdydz, \quad D:\ x=1,\ y=0,\ y=x,\ z=0,\ z=\sqrt{xy},$

12. $\iiint\limits_D \left(1+2x^3\right)dxdydz, \quad D:\ x=1,\ y=0,\ y=36x,\ z=0,\ z=\sqrt{xy},$

13. $\iiint\limits_D 21xz\,dxdydz, \quad D:\ x=2,\ y=x,\ y=0,\ z=xy,\ z=0,$

14. $\iiint\limits_D \dfrac{dxdydz}{\left(1+\dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}\right)^6}, \quad D:\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ \dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}=1,$

15. $\iiint\limits_D \left(x^2+3y^2\right)dxdydz, \quad D:\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=10x,\ x+y=1,$

16. $\iiint\limits_D (60y+90z)dxdydz, \quad D:\ x=1,\ y=0,\ y=x,\ z=0,\ z=x^2+y^2,$

17. $\iiint\limits_D \left(\dfrac{5}{3}+\dfrac{10}{3}x^3\right)dxdydz, \quad D:\ x=1,\ y=0,\ y=9x,\ z=0,\ z=\sqrt{xy},$

18. $\iiint\limits_D (9+18z)dxdydz, \quad D:\ x=1,\ y=0,\ y=4x,\ z=0,\ z=\sqrt{xy},$

19. $\iiint\limits_D 3y^2dxdydz, \quad D:\ x=2,\ y=2x,\ y=0,\ z=xy,\ z=0,$

20. $\iiint\limits_D \dfrac{dxdydz}{\left(1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{6}\right)^4}, \quad D:\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{6}=1,$

21. $\iiint\limits_D x^2dxdydz, \quad D:\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=10(x+3y),\ x+y=1,$

22. $\iiint\limits_D (8y+12z)dxdydz, \quad D:\ x=1,\ y=0,\ y=x,\ z=0,\ z=3x^2+2y^2,$

23. $\iiint\limits_D 63\left(1+2\sqrt{y}\right)dxdydz, \quad D:\ x=1,\ y=0,\ y=x,\ z=0,\ z=\sqrt{xy},$

24. $\iiint\limits_D (x+y)dxdydz, \quad D:\ x=1,\ y=0,\ y=x,\ z=0,\ z=30x^2+60y^2,$

25. $\iiint\limits_D \dfrac{dxdydz}{\left(1+\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{16}\right)^5}, \quad D:\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{16}=1,$

26. $\iiint\limits_D xyz\,dxdydz,\quad D:\ x=2,\ \ y=x,\ \ y=0,\ \ z=xy,\ \ z=0,$

27. $\iiint\limits_D y^2 dxdydz,\quad D:\ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ z=10(3x+y),\ \ x+y=1,$

28. $\iiint\limits_D \left(5x+\dfrac{3z}{2}\right)dxdydz,\quad D:\ x=1,\ \ y=0,\ \ y=x,\ \ z=0,\ \ z=x^2+15y^2,$

29. $\iiint\limits_D \dfrac{dxdydz}{\left(1+\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{5}\right)^6},\quad D:\ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ \dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{5}=1,$

30. $\iiint\limits_D x^2 z\,dxdydz,\quad D:\ x=2,\ \ y=3x,\ \ y=0,\ \ z=xy,\ \ z=0.$

V. Обчислити потрійний інтеграл

1. $\iiint\limits_D \dfrac{5}{4}(x^2+y^2)dxdydz,\quad D:\ y=0,\ \ y=\sqrt{4-x^2},\ \ z=0,\ \ z=8\sqrt{x^2+y^2},$

2. $\iiint\limits_D (x^2+y^2)dxdydz,\quad D:\ x^2+y^2+z^2=1,$

3. $\iiint\limits_D 4z\,dxdydz,\quad D:\ x=0,\ \ x=\sqrt{1-y^2},\ \ z=-1,\ \ z=\sqrt{4-x^2-y^2},$

4. $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,\quad D:\ x^2+y^2+z^2=1,\ \ x^2+y^2+z^2=4,$

5. $\iiint\limits_D 10x\,dxdydz,\quad D:\ x=0,\ \ y=\sqrt{1-x^2},\ \ y=x,\ \ z=0,\ \ 2z=x^2+y^2,$

6. $\iiint\limits_D z^2 dxdydz,\quad D:\ x^2+y^2+z^2=4,$

7. $\iiint\limits_D 80yz\,dxdydz,\quad D:\ y=0,\ \ y=\sqrt{\dfrac{16}{49}z^2-x^2},\ \ \dfrac{4}{7}z=x^2+y^2,$

8. $\iiint\limits_D z\,dxdydz,\quad D:\ z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ \ z=0,$

9. $\iiint\limits_D 4xz\,dxdydz, \quad D:\ x^2+y^2=2x,\ z=1,\ z=2,$

10. $\iiint\limits_D x^2dxdydz, \quad D:\ z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ z=\sqrt{1-x^2-y^2},\ z=0,$

11. $\iiint\limits_D (x^2+y^2)dxdydz, \quad D:\ x=0,\ x=\sqrt{4-y^2},\ z=0,\ z=\sqrt{x^2+y^2},$

12. $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz, \quad D:\ x=\sqrt{1-y^2-z^2},\ x=0,$

13. $\iiint\limits_D z\,dxdydz, \quad D:\ y=0,\ y=\sqrt{9-x^2},\ z=-2,\ z=\sqrt{16-x^2-y^2},$

14. $\iiint\limits_D x\,dxdydz, \quad D:\ x=\sqrt{4-y^2-z^2},\ x=0,$

15. $\iiint\limits_D x\,dxdydz, \quad D:\ x=0,\ y=\sqrt{1-x^2},\ y=\sqrt{3}\cdot x,\ z=0,\ z=x^2+y^2,$

16. $\iiint\limits_D (x^2+y^2)dxdydz, \quad D:\ x^2+y^2+z^2=1,\ z=\sqrt{x^2+y^2},$

17. $\iiint\limits_D xz\,dxdydz, \quad D:\ x=0,\ x=\sqrt{z^2-y^2},\ z=x^2+y^2,$

18. $\iiint\limits_D x\,dxdydz, \quad D:\ x=\sqrt{4-y^2-z^2},\ x=y,\ x=-y,$

19. $\iiint\limits_D z\,dxdydz, \quad D:\ y=0,\ y=\sqrt{2x-x^2},\ z=0,\ z=\sqrt{x^2+y^2},$

20. $\iiint\limits_D y\,dxdydz, \quad D:\ y=\sqrt{1-x^2-z^2},\ y=\sqrt{3}\cdot x,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},$

21. $\iiint\limits_D (x^2+y^2)dxdydz, \quad D:\ x^2+y^2=4,\ z^2=x^2+y^2,$

22. $\iiint\limits_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz, \quad D:\ y=\sqrt{1-x^2-z^2},\ y=\sqrt{3}\cdot x,\ x=0,$

23. $\iiint\limits_D z\,dxdydz, \quad D:\ x^2+y^2=1,\ z=-1,\ z=\sqrt{4-x^2-y^2},$

24. $\iiint\limits_D x\,dxdydz, \quad D:\ x=\sqrt{1-y^2-z^2},\ x=\sqrt{4-y^2-z^2},\ x=0,$

25. $\iiint\limits_D 10x\,dxdydz, \quad D:\ y=\sqrt{1-x^2},\ y=x,\ y=-x,\ z=0,\ z=x^2+y^2,$

26. $\iiint\limits_D (x^2+y^2)dxdydz, \quad D:\ x^2+y^2=z^2,\ z=\sqrt{1-x^2-y^2},$

27. $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdydz, \quad D:\ z^2=x^2+y^2,\ z=x^2+y^2,$

28. $\iiint\limits_D x\,dxdydz, \quad D:\ x=0,\ x=\sqrt{z^2-y^2},\ z=\sqrt{1-x^2-y^2},$

29. $\iiint\limits_D z\,dxdydz, \quad D:\ x^2+y^2=4y,\ z=0,\ z=\sqrt{x^2+y^2},$

30. $\iiint\limits_D 20z\,dxdydz, \quad D:\ x^2+y^2=z^2,\ z=\sqrt{1-x^2-y^2}.$

VI. Обчислити криволінійний інтеграл (x, y – декартові координати, ρ, φ – полярні координати, t – параметр)

1. $\int\limits_\Gamma \frac{x\,dl}{\sqrt{1-y^2}}; \quad \Gamma:\ y=x;\ x\in\left[0;\frac{1}{2}\right],$

2. $\int\limits_\Gamma y\cdot\sqrt[4]{x^2+y^2}dl; \quad \Gamma:\ \rho=1-\cos\varphi;\ \varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right],$

3. $\int\limits_\Gamma \frac{y}{x^3}dl; \quad \Gamma:\ \begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t; \end{cases}\ t\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right],$

4. $\int\limits_\Gamma \frac{\sqrt{1+4y}}{x}dl; \quad \Gamma:\ y=x^2;\ x\in[1;2],$

5. $\int\limits_\Gamma x\,dl; \quad \Gamma:\ \begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t; \end{cases}\ t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right],$

6. $\int\limits_\Gamma x^2dl; \quad \Gamma:\ y=\ln x;\ x\in[1;2],$

7. $\int\limits_{\Gamma} \sin x dl; \quad \Gamma: \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \frac{1}{2}\ln(1-t^2); \end{cases} \; t \in \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right],$

8. $\int\limits_{\Gamma} y^2 dl; \quad \Gamma: \; y = e^x; \; x \in [0;1],$

9. $\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{x^2+y^2} dl; \quad \Gamma: \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t; \end{cases} \; t \in [0;1],$

10. $\int\limits_{\Gamma} \frac{y}{x\sqrt[4]{x^2+y^2}} dl; \quad \Gamma: \; \rho = 1 + \cos\varphi; \; \varphi \in \left[\pi/6; \pi/3\right],$

11. $\int\limits_{\Gamma} y \cos^6 x dl; \quad \Gamma: \; y = \mathrm{tg} x; \; x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right],$

12. $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2+y^2} dl; \quad \Gamma: \begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t; \end{cases} \; t \in [0;1],$

13. $\int\limits_{\Gamma} y \cos x dl; \quad \Gamma: \; y = \sin x; \; x \in [0;\pi],$

14. $\int\limits_{\Gamma} \frac{\sqrt{2-y^2}}{\sin^2 x} dl; \quad \Gamma: \; y = \cos x; \; x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right],$

15. $\int\limits_{\Gamma} y dl; \quad \Gamma: \; y = x^3; \; x \in [0;1],$

16. $\int\limits_{\Gamma} \sqrt[4]{(x^2+y^2)^3} dl; \quad \Gamma: \; \rho = 1 - \sin\varphi; \; \varphi \in [0;\pi],$

17. $\int\limits_{\Gamma} x^3 y dl; \quad \Gamma: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t; \end{cases} \; t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$

18. $\int\limits_{\Gamma} \frac{y}{\sqrt{x}} dl; \quad \Gamma: \; y = \frac{2}{3} x\sqrt{x}; \; x \in [0;3],$

19. $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{\frac{x}{y}} dl; \quad \Gamma: \begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \sin^2 t; \end{cases} \; t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right],$

20. $\int\limits_{\Gamma} x^2 dl; \quad \Gamma: \; \rho = \mathrm{tg}\varphi; \; \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right],$

21. $\int\limits_{\Gamma}(e^{y}-x)dl;\quad \Gamma:\ y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right);\ \ x\in[1;2],$

22. $\int\limits_{\Gamma}xdl;\quad \Gamma:\ \begin{cases} x=t, \\ y=t^2; \end{cases}\ \ t\in[1;2],$

23. $\int\limits_{\Gamma}x\cdot\sqrt{x^2-y^2}dl;\quad \Gamma:\ \rho=\sqrt{\cos 2\varphi};\ \ \varphi\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right],$

24. $\int\limits_{\Gamma}y^2dl;\quad \Gamma:\ \begin{cases} x=\ln t, \\ y=t; \end{cases}\ \ t\in[1;2],$

25. $\int\limits_{\Gamma}\left(1-x^2\right)dl;\quad \Gamma:\ y=\ln\left(1-x^2\right);\ \ x\in\left[0;\frac{1}{2}\right],$

26. $\int\limits_{\Gamma}\frac{y}{x^2}dl;\quad \Gamma:\ \rho=\frac{1}{\cos\varphi};\ \ \varphi\in\left[0;\pi/4\right],$

27. $\int\limits_{\Gamma}\frac{y^2}{x^3}dl;\quad \Gamma:\ y=\frac{2}{5}x^2\cdot\sqrt{x};\ \ x\in[0;2],$

28. $\int\limits_{\Gamma}y\cos xdl;\quad \Gamma:\ \ y=\ln\sin x;\quad x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right],$

29. $\int\limits_{\Gamma}\sqrt{1+x^2+y^2}dl;\quad \Gamma:\ \rho=\frac{1}{\varphi};\ \ \varphi\in[1;2],$

30. $\int\limits_{\Gamma}\sqrt{y^3}dl;\quad \Gamma:\ \begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t; \end{cases}\ \ t\in[0;\pi],$

VII. Обчислити криволінійний інтеграл по кривій, орієнтація якої узгоджена з напрямком зростання аргумента x або параметра t у випадку незамкненої кривої, та з напрямком, протилежним руху годинникової стрілки у випадку замкненої кривої

1. $\int\limits_{\Gamma}\left(x^2-2y\right)dx+\left(y^2-2x\right)dy,\quad \Gamma:\quad y=\frac{x+4}{2};\quad x\in[0;1],$

2. $\int\limits_{\Gamma} xydx + xdy, \quad \Gamma: \quad \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t; \end{cases} \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$

3. $\oint\limits_{\Gamma} xydx + x^2dy, \quad \Gamma: \quad x^2 + y^2 = 1,$

4. $\int\limits_{\Gamma} ydx + x^2dy, \quad \Gamma: \quad y = x^2; \quad x \in [0;1],$

5. $\int\limits_{\Gamma} (x+y)dx + \left(x^2 - y\right)dy, \quad \Gamma: \quad \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = t^2 - 1; \end{cases} \quad t \in [0;1],$

6. $\oint\limits_{\Gamma} xydx + ydy, \quad \Gamma: \quad x^2 + y^2 = 1,$

7. $\int\limits_{\Gamma} y \sin xdx + \cos^2 xdy, \quad \Gamma: \quad y = \cos x; \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$

8. $\int\limits_{\Gamma} ydx + dy, \quad \Gamma: \quad \begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \sin^2 t; \end{cases} \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$

9. $\oint\limits_{\Gamma} \left(x^2 + y^2\right)dx + xdy, \quad \Gamma: \quad y = x^2; \quad y = 1,$

10. $\int\limits_{\Gamma} ydx + \frac{dy}{\cos x}, \quad \Gamma: \quad y = \sin x; \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right],$

11. $\int\limits_{\Gamma} x^3dx - y^3dy, \quad \Gamma: \quad \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t; \end{cases} \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$

12. $\int\limits_{\Gamma} y^4dx - 4y \cos xdy, \quad \Gamma: \quad y = \sqrt{\cos x}, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right],$

13. $\oint\limits_{\Gamma} xydx + (x+y)dy, \quad \Gamma: \quad y = x^2; \quad y = x,$

14. $\int\limits_{\Gamma} y \cos xdx + ydy, \quad \Gamma: \quad y = \mathrm{tg}x; \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right],$

15. $\int\limits_{\Gamma} (2xy - y)dx + (x^2 + x)dy, \quad \Gamma: \quad \begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t; \end{cases} \quad t \in [0; \pi],$

16. $\oint\limits_{\Gamma} xy^2dx + ydy; \quad \Gamma: \ y = x; \ \ x = 1; \ \ y = 0,$

17. $\int\limits_{\Gamma} ydx + \frac{x}{y}dy, \quad \Gamma: \quad y = e^x; \quad x \in [0;1]$

18. $\int\limits_{\Gamma} xydx - y^2dy, \quad \Gamma: \quad \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t; \end{cases} \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$

19. $\oint\limits_{\Gamma} (\sin y - 3\sin x)dx + x\cos ydy, \quad \Gamma: \ y = x^2 + 1, \ \ y = 3 - x^2,$

20. $\int\limits_{\Gamma} \frac{dx}{xy} + x^2dy, \quad \Gamma: \quad y = \ln x; \quad x \in [1; e],$

21. $\int\limits_{\Gamma} ydx - e^xdy, \quad \Gamma: \quad \begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1; \end{cases} \quad t \in [1; 2],$

22. $\oint\limits_{\Gamma} x^2ydx - xy^2dy, \quad \Gamma: \ x = \sqrt{1 - y^2}, \ \ x = 0,$

23. $\int\limits_{\Gamma} (x + y)dx + (x - y)dy, \quad \Gamma: \quad y = x^2; \quad x \in [-1;1],$

24. $\int\limits_{\Gamma} xydx - y(1 + x^2)dy, \quad \Gamma: \quad \begin{cases} x = tgt, \\ y = \cos t; \end{cases} \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right],$

25. $\oint\limits_{\Gamma} (y - x^2)dx + (\sin^2 y + 3x)dy, \quad \Gamma: \ y = -\frac{2}{x}, \ \ x - y = 3,$

26. $\int\limits_{\Gamma} x^2ydx - ydy, \quad \Gamma: \quad y = x + 1; \quad x \in [-1; 0],$

27. $\oint\limits_{\Gamma} (y^2 - y)dx + (2xy - x)dy, \quad \Gamma: \ x^2 + y^2 = 2x - 2y,$

28. $\int\limits_{\Gamma} \frac{x + y}{y}dx - \frac{dy}{y + 2x^3}, \quad \Gamma: \quad y = x^3, \quad x \in [1; 2],$

29. $\oint\limits_{\Gamma} (3x^2y^2 + 2y)dx + (2x^3y - 3x)dy, \quad \Gamma: \ y = \sqrt{2}, \ \ y = x, \ \ y = -x,$

30. $\int\limits_{\Gamma} \frac{x}{y}dx - xdy, \quad \Gamma: \quad y = \frac{1}{x+2}, \quad x \in [-1;0].$

VIII. Переконатись, що даний криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування та обчислити його

1. $\int\limits_{(1,-1)}^{(2,1)} (y^2 - y)dx + (2xy - x)dy$

2. $\int\limits_{(0,1)}^{(1,0)} (e^y - ye^x)dx + (xe^y - e^x)dy$

3. $\int\limits_{(0,\pi/4)}^{(\pi/2,0)} (\sin y - 3\sin x)dx + x\cos y dy,$

4. $\int\limits_{(-1,0)}^{(2,1)} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2},$

5. $\int\limits_{(1,4)}^{(3,1)} (\sqrt{y} + 1)dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} - 2\right)dy,$

6. $\int\limits_{(0,0)}^{(\pi/2,\pi/2)} \cos x \sin y dx + \sin x \cos y dy,$

7. $\int\limits_{(1,1)}^{(3,\sqrt{3})} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$

8. $\int\limits_{(1,4)}^{(3,3)} \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}dx + \left(\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} + 1\right)dy,$

9. $\int\limits_{(0,0)}^{(\pi,\pi)} \cos x \cos^2 y dx - \sin x \sin 2y dy,$

10. $\int\limits_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2y^2 + y)dx + (2x^3y + x)dy,$

11. $\int\limits_{(2,1)}^{(4,2)} \left(\frac{1}{y} + 5\right)dx + \left(1 - \frac{x}{y^2}\right)dy,$

12. $\int\limits_{(0,0)}^{(\pi,\pi)} 2x\cos y dx - x^2 \sin y dy,$

13. $\int\limits_{(0,0)}^{(2,2)} (2x + y)dx + (x - 2y)dy,$

14. $\int\limits_{(2,1)}^{(4,2)} \left(\frac{1}{\sqrt{x + y^2}} + 5\right)dx + \frac{2ydy}{\sqrt{x + y^2}},$

15. $\int\limits_{(0,0)}^{(\pi,\pi)} (\sin 2x - 5\cos x)dx - \sin y dy,$

16. $\int\limits_{(-1,1)}^{(4,-2)} \frac{dx}{y^2} + \left(3 - \frac{2x}{y^3}\right)dy,$

17. $\int\limits_{(0,1)}^{(2,4)} \left(\frac{3x^2}{y} + 1\right)dx - \left(2 + \frac{x^3}{y^2}\right)dy,$

18. $\int\limits_{(0,0)}^{(\pi/4,\pi/3)} \frac{\sin^2 y}{\cos^2 x}dx + \operatorname{tg} x \sin 2y dy,$

19. $\int\limits_{(0,1)}^{(8,2)} \frac{dx}{x+y} - \frac{xdy}{xy + y^2},$

20. $\int\limits_{(0,1)}^{(4,2)} \frac{e^{\frac{x}{y}}dx}{y} - \frac{xe^{\frac{x}{y}}dy}{y^2},$

21. $\int\limits_{(0,1)}^{(\pi/2,\,1/2)} \frac{\cos x dx}{y} - \frac{\sin x dy}{y^2}$,

22. $\int\limits_{(0,1)}^{(1,2)} \frac{2x dy}{(x-y)^2} - \frac{2y dx}{(x-y)^2}$,

23. $\int\limits_{(0,1)}^{(2,4)} \frac{2x dx}{\sqrt{y}} - \frac{x^2 dy}{2y\sqrt{y}}$,

24. $\int\limits_{(1,\pi/2)}^{(4,\pi)} \frac{\cos y dx}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\sin y dy$,

25. $\int\limits_{(0,1)}^{(2,1)} \frac{x^2 - 2xy}{(x-y)^2} dx + \frac{x^2 dy}{(x-y)^2}$,

26. $\int\limits_{(1,1)}^{(2,8)} \left(\frac{y}{\sqrt{xy}} + 5\right)dx + \left(\frac{x}{\sqrt{xy}} - 1\right)dy$,

27. $\int\limits_{(0,1)}^{(\pi/4,\,4)} \frac{\sqrt{y}}{\cos^2 x} dx + \frac{\mathrm{tg}x}{2\sqrt{y}} dy$,

28. $\int\limits_{(1,1)}^{(2,3)} \left(y - \frac{1}{x^2 y}\right)dx + \left(x - \frac{1}{xy^2}\right)dy$,

29. $\int\limits_{(0,1)}^{(2,1)} \frac{1}{1+x} dx + \frac{1+x}{(x-y)^2} dy$,

30. $\int\limits_{(0,0)}^{(\pi/2,\,1)} (\sin 2x + y)dx + (x-y)dy$.

IX. Обчислити поверхневий інтеграл (для поверхневого інтеграла другого роду по незамкненій поверхні брати верхню її сторону, а по замкненій – зовнішню сторону)

1. $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1+x^2+y^2}\, d\sigma, \quad \Omega: \quad z = xy; \quad (x,y) \in D; \; D: \; x^2 + y^2 = 1,$

2. $\iint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdy, \quad \Omega: \; z = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (x,y) \in D; \; D: \; x^2 + y^2 = 9,$

3. $\iint\limits_{\Omega} \frac{z}{xy} d\sigma, \quad \Omega: \; z = xy; \quad (x,y) \in D; \; D: \; x^2 + y^2 = 1,$

4. $\iint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy; \; \Omega: z = \sqrt{x^2 + y^2}; \; (x,y) \in D; \; D: x = 1; y = 0; y = x,$

5. $\iint\limits_{\Omega} xy d\sigma, \quad \Omega: \; z = \sqrt{x^2 + y^2}; \; (x,y) \in D; \; D: \; x^2 + y^2 = 1,$

6. $\iint\limits_{\Omega} z dxdy; \; \Omega: \quad z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}; \quad (x,y) \in D; \; D: \quad x^2 + y^2 = 1,$

7. $\iint\limits_{\Omega} z d\sigma, \quad \Omega:\ z=\sqrt{1-x^2-y^2};\ (x,y)\in D;\ D:\ x^2+y^2=1,$

8. $\iint\limits_{\Omega} \left(1+y^2+z^2\right) dxdy; \quad \Omega:\ z=\sqrt{9-x^2-y^2};$

$(x,y)\in D;\ \ D: y=0;\ \ y=x;\ \ x=-1,$

9. $\iint\limits_{\Omega} xyz d\sigma, \quad \Omega:\ z=\sqrt{4-x^2-y^2};\ (x,y)\in D;\ D:\ y=0;\ x=1;\ y=x,$

10. $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{z-y^2} dxdy; \quad \Omega:\ z=x^2+y^2;\ (x,y)\in D;\ D:\ y=0;\ y=x^2;\ x=1,$

11. $\iint\limits_{\Omega} (x+y) d\sigma, \quad \Omega:\ z=\sqrt{x^2+y^2};\ (x,y)\in D;\ D:\ \ y=x^2;\ \ y=1,$

12. $\iint\limits_{\Omega} \left(x^2+y^2+z\right) dxdy; \quad \Omega:\ z=x^2+y^2;\ (x,y)\in D;\ D:\ x^2+y^2=4,$

13. $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1+4z} d\sigma, \quad \Omega:\ z=x^2+y^2;\ (x,y)\in D;\ \ D:\ y=0;\ y=-x;\ x=1,$

14. $\iint\limits_{\Omega} (x+z) dxdy; \quad \Omega:\ z=xy;\ (x,y)\in D;\ D:\ y=0;\ y=-x;\ x=-1,$

15. $\iint\limits_{\Omega} \frac{x+y}{\sqrt{1+4z}} d\sigma, \quad \Omega:\ z=x^2+y^2;\ (x,y)\in D;\ D:\ y=x;\ y=-x^2;\ x=1,$

16. $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{xyz} dxdy; \quad \Omega:\ z=xy;\ (x,y)\in D;\ D:\ y=x^2;\ y=\sqrt{x},$

17. $\iint\limits_{\Omega} (x+z) d\sigma, \ \Omega: 2x-3y+z=5;\ (x,y)\in D;\ D: y=0;\ y=x^2;\ x=1,$

18. $\iint\limits_{\Omega} (x+3y+z) dxdy; \quad \Omega:\ 2x+3y+z=6;$

$(x,y)\in D;\ D:\ x=0;\ y=x;\ y=1,$

19. $\iint\limits_{\Omega} (xy+z) d\sigma, \quad \Omega:\ x+2y=z;\ (x,y)\in D;\ D:\ y=0;\ y=-x;\ x=-1,$

20. $\iint\limits_{\Omega} \left(z^2-x^2-y^2\right) dxdy; \quad \Omega:\ x+y+z=0;$

$(x,y)\in D;\ D:\ y=x^2;\ y=\sqrt{x},$

21. $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+x^2+y^2}d\sigma, \quad \Omega:\ z=xy;\ (x,y)\in D;\ D:\ y=0; \quad y=x; \quad x=-1,$

22. $\oiint\limits_{\Omega} xdydz; \quad \Omega:\ z=\sqrt{x^2+y^2};\ z=1,$

23. $\iint\limits_{\Omega} z^2 d\sigma, \quad \Omega:\ z=\sqrt{x^2+y^2};\ (x,y)\in D;\ D: \quad y=0; \quad y=x^2; \quad x=-1,$

24. $\oiint\limits_{\Omega}(x+z)dydz+(z+y)dxdy; \quad \Omega:\ x^2+y^2=4;\ z=0;\ z=2,$

25. $\iint\limits_{\Omega} x^2 zd\sigma, \quad \Omega: \quad z=\sqrt{9-x^2-y^2}; \quad (x,y)\in D;\ D:\ y=0;\ y=x;\ x=1,$

26. $\oiint\limits_{\Omega} x^2 dydz+xdxdz-2xzdxdy; \quad \Omega:\ z=x^2+y^2;\ z=4,$

27. $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+4z}d\sigma, \quad \Omega: \quad z=x^2+y^2; \quad (x,y)\in D; \quad D: \quad y=\sqrt{x}; \quad y=x^2,$

28. $\oiint\limits_{\Omega}(4x-z)dydz+(2y+x)dxdy; \quad \Omega:\ x^2+y^2+z^2=1,$

29. $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)d\sigma, \quad \Omega: \quad 3x-2y+z=5; \quad (x,y)\in D;\ D: \quad x^2+y^2=1,$

30. $\oiint\limits_{\Omega} xydydz; \quad \Omega:\ x+y+z=1;\ x=0;\ y=0;\ z=0.$

X. Обчислити поверхневий інтеграл по незамкненій поверхні, доповнюючи її до замкненої одною або двома частинами площин та застосовуючи формулу Остроградського (брати зовнішню сторону утвореної поверхні)

1. $\iint\limits_{\Omega}(x+xy^2)dydz+(y-yx^2)dxdz+(z-3)dxdy,$

$$\Omega:\ x^2+y^2=z^2,\ z\in[0,1],$$

2. $\iint\limits_{\Omega}(x+xz)dydz+ydxdz+(z-x^2)dxdy,\ \Omega:\ x^2+y^2+z^2=4,\ z\in[0,2],$

3. $\iint\limits_{\Omega} xdydz+ydxdz+zdxdy,\ \Omega:\ x^2+y^2=1,\ z\in[0,2],$

4. $\iint\limits_{\Omega} ydydz - xdxdz + dxdy,\ \ \Omega:\ x^2+y^2=z^2,\ \ z\in[0,4],$

5. $\iint\limits_{\Omega} xdydz + (y+yz^2)dxdz + (z-zy^2)dxdy,$

$\Omega:\ x^2+y^2+z^2=4,\ \ z\in[0,2],$

6. $\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydxdz - zdxdy,\ \ \Omega:\ x^2+y^2=1,\ \ z\in[0,4],$

7. $\iint\limits_{\Omega} xydydz - x^2dxdz + 3dxdy,\ \ \Omega:\ x^2+y^2=z^2,\ \ z\in[0,1],$

8. $\iint\limits_{\Omega} (x+z)dydz + (y+z)dxdz + (z-x-y)dxdy,$

$\Omega:\ x^2+y^2+z^2=4,\ \ z\in[0,2],$

9. $\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydxdz + 2zdxdy,\ \ \Omega:\ x^2+y^2=1,\ \ z\in[0,3],$

10. $\iint\limits_{\Omega} xzdydz + yzdxdz + (z^2-1)dxdy,\ \ \Omega:\ x^2+y^2=z^2,\ \ z\in[0,4],$

11. $\iint\limits_{\Omega} (x+xy)dydz + (y-x^2)dxdz + zdxdy,$

$\Omega:\ x^2+y^2+z^2=1,\ \ z\in[0,1],$

12. $\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydxdz + z^3dxdy,\ \ \Omega:\ x^2+y^2=1,\ \ z\in[0,1],$

13. $\iint\limits_{\Omega} xy^2dydz + yx^2dxdz + dxdy,\ \ \Omega:\ x^2+y^2=z^2,\ \ z\in[0,5],$

14. $\iint\limits_{\Omega} (x+z)dydz + ydxdz + (z-x)dxdy,\ \ \Omega:\ x^2+y^2+z^2=1,\ \ z\in[0,1],$

15. $\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydxdz + xyzdxdy,\ \ \Omega:\ x^2+y^2=1,\ \ z\in[0,5],$

16. $\iint\limits_{\Omega} (xz+y)dydz + (yz-x)dxdz + (z^2-2)dxdy,$

$\Omega:\ x^2+y^2=z^2,\ \ z\in[0,3],$

17. $\iint\limits_{\Omega} xdydz + (y+yz)dxdz + (z-y^2)dxdy,\ \ \Omega:\ x^2+y^2+z^2=1,\ \ z\in[0,1],$

18. $\iint\limits_{\Omega}(x-y)dydz+(x+y)dxdz+z^2dxdy,\ \ \Omega:\ x^2+y^2=1,\ \ z\in[0,2],$

19. $\iint\limits_{\Omega}xyzdydz-x^2zdxdz+3dxdy,\ \ \Omega:\ x^2+y^2=z^2,\ \ z\in[0,5],$

20. $\iint\limits_{\Omega}(x-y)dydz+(x+y)dxdz+zdxdy,\ \ \Omega:\ x^2+y^2+z^2=1,\ \ z\in[0,1],$

21. $\iint\limits_{\Omega}(x+y)dydz-(x-y)dxdz+xyzdxdy,\ \ \Omega:\ x^2+y^2=1,\ \ z\in[0,4],$

22. $\iint\limits_{\Omega}(x+xy)dydz+(y-x^2)dxdz+(z-1)dxdy,$

$\Omega:\ x^2+y^2=z^2,\ \ z\in[0,3],$

23. $\iint\limits_{\Omega}(x+xz^2)dydz+ydxdz+(z-zx^2)dxdy,$

$\Omega:\ x^2+y^2+z^2=9,\ \ z\in[0,3],$

24. $\iint\limits_{\Omega}(x^3+xy^2)dydz+(x^2y+y^3)dxdz+z^2dxdy,$

$\Omega:\ x^2+y^2=1,\ \ z\in[0,3],$

25. $\iint\limits_{\Omega}(x+y)dydz+(y-x)dxdz+(z-2)dxdy,\ \ \Omega:\ x^2+y^2=z^2,\ \ z\in[0,2],$

26. $\iint\limits_{\Omega}(x+y)dydz+(y-x)dxdz+zdxdy,\ \ \Omega:\ x^2+y^2+z^2=4,\ \ z\in[0,2],$

27. $\iint\limits_{\Omega}xdydz+ydxdz+\sin zdxdy,\ \ \Omega:\ x^2+y^2=1,\ \ z\in[0,5],$

28. $\iint\limits_{\Omega}xdydz+ydxdz+(z-2)dxdy,\ \ \Omega:\ x^2+y^2=z^2,\ \ z\in[0,1],$

29. $\iint\limits_{\Omega}xdydz+(y+z)dxdz+(z-y)dxdy,\ \ \Omega:\ x^2+y^2+z^2=9,\ \ z\in[0,3].$

30. $\iint\limits_{\Omega}xdydz+ydxdz+dxdy,\ \ \Omega:\ x^2+y^2=1,\ \ z\in[0,1].$

ЛІТЕРАТУРА

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., Наука, 1975.
2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., Наука, 1984.
3. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах, ч.1. М., Высшая школа, 1967.
4. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М., Высшая школа, 1966.
5. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, ч. 1. М., Физматлит, 2005.
6. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Математический анализ: Введение в анализ, производная, интеграл. Справочное пособие по высшей математике, т. 1. М., Едиториал УРСС, 2001.
7. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т. 1, М., Наука, 1976.
8. Довгай В.В., Мельник А.Ф., Коцюк Л.Р. Функції кількох незалежних змінних, Методичні вказівки до самостійної роботи для студентів, НТУУ “КПІ”, Київ, 2010.
9. Довгай В.В., Мельник А.Ф., Коцюк Л.Р. Лінійна алгебра та аналітична геометрія, Методичні вказівки до самостійної роботи для студентів, НТУУ “КПІ”, Київ, 2010.
10. Довгай В.В., Мельник А.Ф. Інтегральне числення функції однієї змінної, Методичні вказівки до самостійної роботи для студентів, НТУУ “КПІ”, Київ, 2011.
11. Довгай В.В., Мельник А.Ф. Функція однієї змінної, її границя та похідна, Методичні вказівки до самостійної роботи для студентів, фізико-математичний факультет НТУУ “КПІ”, Київ, 2012.

ЗМІСТ