МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Розділ: ФУНКЦІЯ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ, ЇЇ ГРАНИЦЯ ТА ПОХІДНА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ

За напрямом 6.050504 "зварювання"

ЗАТВЕРДЖЕНО ВЧЕНОЮ РАДОЮ ФІЗИКО -МАТЕМАТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ НТУУ «КПІ»

Київ 2012

ФУНКЦІЯ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ, ЇЇ ГРАНИЦЯ ТА ПОХІДНА

Методичні вказівки

За напрямом 6.050504 “Зварювання”

Укладачі: Довгай В.В., Мельник А.Ф., 2012 р., 61 с.

Затверджено Вченою Радою Фізико - математичного факультету

НТУУ “КПІ” (протокол №_3_ від__22 березня__ 2012 р.)

ФУНКЦІЯ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ, ЇЇ ГРАНИЦЯ ТА ПОХІДНА

Методичні вказівки

За напрямом 6.050504 “Зварювання”

Укладачі: Довгай В.В., Мельник А.Ф.

Рецензент: Рижов Р.М., д. т. н., проф. каф. ЕЗУ

Відповідальний редактор: Швець О.Ю., д. ф.-м. н., проф. кафедри математичної фізики

ВСТУП

Методичні вказівки “Функція однієї змінної, її границя та похідна” укладені для студентів зварювального факультету з метою забезпечення виконання ними самостійної роботи, що передбачена навчальною програмою з вищої математики та розробленою на її основі робочою навчальною програмою кредитного модуля “Функція однієї змінної, її границя та похідна” для напрямку підготовки бакалавра 6.050504 “Зварювання”.

Методичні вказівки складаються з трьох розділів. В першому розділі коротко викладено необхідний теоретичний матеріал стосовно функції однієї змінної та її границі, наведено основні означення відповідних математичних понять та формули для розрахунків. Другий розділ, що має подібну до першого структуру, присвячено похідній та диференціалу функції однієї змінної, наводяться деякі їх застосування. Для кращого сприйняття матеріалу наводиться достатня кількість малюнків. Обидва розділи містять багато прикладів детального розв’язування типових задач на границі та похідні функції однієї змінної. В третьому розділі містяться задачі для самостійної роботи студентів, якою можуть бути домашні завдання, модульні або домашні контрольні роботи.

Підбір матеріалу і його викладення в методичних вказівках “Функція однієї змінної, її границя та похідна” дозволяє використовувати їх як для денної, так і для заочної форми навчання студентів.

РОЗДІЛ І. ФУНКЦІЯ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ ТА ЇЇ ГРАНИЦЯ

1. Числові множини, їх верхні та нижні межі

Множини $N = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}$, $Z = \{0,\ \pm 1,\ 2,\ \ldots,\ \pm n,\ \ldots\}$ будемо називати множинами ***натуральних*** та ***цілих*** чисел відповідно, а множину всіх чисел вигляду $\frac{m}{n}$ $(m, n \in Z,\ n \neq 0)$ – множиною ***раціональних*** чисел. Числа, що мають вигляд нескінченного неперіодичного десяткового дробу, називаються ірраціональними, всі такі числа утворюють множину ***ірраціональних*** чисел. Об'єднання множин раціональних та ірраціональних чисел є множиною **дійсних** чисел, яка позначається символом R або $(-\infty,\ +\infty)$. Зауважимо, що між множиною дійсних чисел та множиною точок на числовій прямій існує взаємно однозначна відповідність, внаслідок чого поняття дійсного числа $a \in R$ є еквівалентним поняттю точки а на числовій прямій ОХ з координатою $x = a$. Довільну частину R будемо називати підмножиною множини дійсних чисел або просто ***числовою множиною*** та позначати великими літерами латинського алфавіту (X, Y, і т. д.). Те, що X є підмножиною R, записуватимемо у вигляді $X \subset R$. Найчастіше зустрічаються наступні підмножини:

– ***відрізок*** $[a;\ b]$. Це множина вигляду $\{x : a \le x \le b\}$,
– ***інтервал*** $(a;\ b)$. Це множина вигляду $\{x : a < x < b\}$,
– ***окіл точки*** а. Це інтервал $(b;\ c)$, що містить точку а.
– ***е-окіл точки*** а. Це інтервал вигляду $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ і складається з розв'язків нерівності $|x - a| < \varepsilon$.

Верхньою (***нижньою***) ***межею*** числової множини X називається число M (m), для якого $x \le M$ $(x \ge m)$ при всіх $x \in X$. Верхня або нижня межа X може і не існувати, тоді X називають необмеженою. В тому випадку, коли верхня або нижня межа існує, числову множину X називають відповідно ***обмеженою зверху*** або ***знизу***, коли ж існують обидві межі – верхня і нижня, – дану множину називають просто ***обмеженою***. Очевидно, з існування однієї верхньої або нижньої межі числової множини X випливає існування безлічі таких меж, серед яких виділяють ***точну верхню*** та ***точну нижню*** межі X як найменшу з усіх верхніх та найбільшу з усіх нижніх меж цієї множини. Їх позначають відповідно символами $M = \sup\limits_{x \in X}\{x\}$, $m = \inf\limits_{x \in X}\{x\}$. Якщо при цьому M або m належать числовій множині X, то тоді їх називають ***максимумом*** та ***мінімумом*** X і пишуть $M = \max\limits_{x \in X}\{x\}$, $m = \min\{x\}$.

<u>Приклади.</u>

1) $X = (-\infty; -5)$. Ця числова множина не має нижньої межі, отже є необмеженою. Вона має верхню межу, якою може бути, наприклад, число -2 і отже є обмеженою зверху, при цьому $\sup\limits_{x \in (-\infty,\ -5)}\{x\} = -5$. Так як $-5 \notin X$, то максимуму дана множина не має.
2) $X = [-1;\ 3)$. Дана числова множина має нижню і верхню межі, якими можуть бути, наприклад, числа -7 та 5. Звідси випливає, що X обмежена. Крім того, $\sup\limits_{x \in [-1;\ 3)}\{x\} = 3$, $\inf\limits_{x \in [-1;\ 3)}\{x\} = \min\limits_{x \in [-1;\ 3)}\{x\} = -1$, максимуму дана множина не має.

2. Функція однієї змінної та її границя. Односторонні границі

Нехай X та Y – дві числові множини. Якщо кожному значенню $x \in X$ по деякому правилу або закону поставлено у відповідність єдине число $y \in Y$, то говорять, що на множині X визначена ***функція однієї змінної*** із значеннями в Y. При цьому пишуть $y = f(x)$, $x \in X$, та називають x ***аргументом*** функції $f(x)$, X – ***областю визначення*** $f(x)$. Якщо міняти аргумент x в межах області визначення X, надаючи йому послідовно всіх значень з X, то відповідна точка $(x,\ f(x))$ на координатній площині XOY опише деякий геометричний образ, що називається ***графіком функції*** $y = f(x),\ x \in X$.

Число A називається ***границею функції*** $f(x)$ в точці a якщо ця функція визначена в деякому околі даної точки (крім, можливо, самої точки a) і для довільного (як завгодно малого) числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$ (залежне від ε) таке, що для всіх x із даного околу, які задовольняють умову $0 < |x - a| < \delta$, буде виконуватись нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. При цьому пишуть $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Геометрична інтерпретація даного означення дана на рис. 1 за допомогою графіка функції $y = f(x)$, що визначена в деякому околі точки a. Умови цього означення полягають у тому, що коли аргумент x попадає в δ-окіл точки a на осі OX, то відповідні значення $f(x)$, будуть знаходитися в ε-околі точки A на осі OY

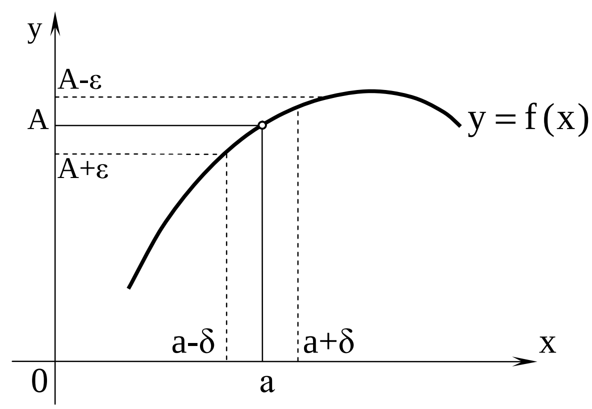

Рис. 1

<u>Приклади.</u> Виходячи з означення довести, що

1) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$, 2) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

Маємо

1) Візьмемо довільний окіл точки a=2, наприклад, інтервал $(2-1;\ 2+1)=(1;\ 3)$. В цьому околі $\left|x^2-4\right|=\left|x-2\right|\cdot\left|x+2\right|<5\left|x-2\right|$. Беремо тепер довільне число $\varepsilon>0$ та визначаємо δ рівністю $\delta=\min\{1;\ \frac{\varepsilon}{5}\}$. Тоді з виконання умови $0<\left|x-a\right|<\delta$ випливатиме, що $\left|x^2-4\right|<5\left|x-2\right|<5\cdot\frac{\varepsilon}{5}=\varepsilon$, а це і означає, що $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$.

2) Враховуючи, що $\left|\sin x\right|<\left|x\right|$ при всіх $x\in R$, для цих же значень x отримаємо $\left|\cos x-1\right|=2\sin^2\frac{x}{2}\le 2\frac{\left|x\right|^2}{4}=\frac{\left|x\right|^2}{2}$. Покладемо тепер $\delta=\sqrt{2\varepsilon}$, тоді, якщо взяти ті значення x, які задовольняють умову $0<\left|x\right|<\delta$, матимемо $\left|\cos x-1\right|=\frac{\left|x\right|^2}{2}<\frac{2\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Це означає, що $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

Крім границі $A=\lim\limits_{x\to a}f(x)$, яка називається ще ***двосторонньою***, існують ще й ***односторонні*** границі – ***лівостороння*** та ***правостороння***. Вони визначаються наступним чином.

Число A називається лівосторонньою (правосторонньою)границею функції $f(x)$ в точці a якщо ця функція визначена в деякому інтервалі $(b;\ a)$ $((a;\ b))$ та, можливо, в самій точці a, і для довільного (як завгодно малого) числа $\varepsilon>0$ знайдеться число $\delta>0$ (залежне від ε) таке, що для всіх x із даного інтервалу, які задовольняють умову $a-\delta<x<a$ $(a<x<a+\delta)$, буде виконуватись нерівність $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$. При цьому пишуть $A=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ $(A=\lim\limits_{x\to a+0}f(x))$. Очевидно, що умова існування обох односторонніх границь $A=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $A=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ еквівалентна умові існування однієї двосторонньої границі $A=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Крім скінченних значень A та a можуть бути також символи $\infty, \pm\infty$. Наприклад, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ означає, що функція $f(x)$, визначена в деякому околі точки a (крім, можливо, самої цієї точки) і для довільного як завгодно великого числа $M>0$ знайдеться число $\delta>0$ (залежне від M) таке, що для всіх x із даного околу, які задовольняють умову $0<|x-a|<\delta$, буде виконуватись нерівність $|f(x)-A|>M$. Вираз $A=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ використовується в тому випадку, коли $f(x)$ визначена при всіх досить великих значеннях x і для довільного (як завгодно малого) числа $\varepsilon>0$ знайдеться число $M>0$ (залежне від ε) таке, що для всіх x із області визначення, що задовольняють умову $|x|>M$, буде виконуватись нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$. Символами $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ позначають відповідні односторонні границі.

Частинним випадком функції однієї змінної є ***числова послідовність***, яку позначають символом $x_n, n\in N$. Це функція, що визначена на множині натуральних чисел, для якої подібним чином вводиться поняття границі при $n\to\infty$, тобто число A називається границею послідовності $x_n, n\in N$, якщо для довільного (як завгодно малого) числа $\varepsilon>0$ знайдеться число $M>0$ (залежне від ε) таке, що для всіх n, які задовольняють умову $n>M$, буде виконуватись нерівність $|x_n-A|<\varepsilon$. При цьому пишуть $A=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

<u>Приклад.</u> Виходячи з означення границі послідовності довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

Дійсно, візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$ і визначимо M як розв'язок рівняння $\frac{1}{n^2} = \varepsilon$, тобто $M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Тоді для всіх n, що задовольняють умову $n > M$, буде виконуватись нерівність $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{M^2} = \varepsilon$. Звідси випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

3. Обмежені, нескінченно малі, нескінченно великі величини. Властивості границь.

Функція $f(x)$ називається обмеженою на деякій числовій множині X, якщо існує така стала M>0, що $|f(x)| \le M$ для всіх $x \in X$.

Функція $f(x)$ називається обмеженою величиною при $x \to a$, якщо існує такий окіл точки a (за винятком самої точки a), в якому $f(x)$ буде обмеженою.

Функція $f(x)$ називається ***нескінченно малою величиною*** при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Функція $f(x)$ називається ***нескінченно великою величиною*** при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, функція $g(x)$ обмежена при $x \to a$, функції $\alpha(x)$, $\beta(x)$ є нескінченно малими величинами при $x \to a$, то тоді

1. $f(x)$ – обмежена при $x \to a$. У випадку коли $A \ne 0$ функція $\frac{1}{f(x)}$ теж буде обмеженою при $x \to a$.

2. $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – нескінченно велика величина при $x \to a$, якщо $\alpha(x) \neq 0$ в деякому околі точки а (крім самої точки а).

3. $C \cdot \alpha(x)$ – нескінченно мала величина при $x \to a$. Тут C – деяка стала.

4. $\alpha(x) + \beta(x)$ – нескінченно мала величина при $x \to a$.

5. $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ – нескінченно мала величина при $x \to a$.

6. $\alpha(x) \cdot g(x)$ – нескінченно мала величина при $x \to a$.

7. $\dfrac{\alpha(x)}{f(x)}$ – нескінченно мала величина при $x \to a$, якщо $A \neq 0$.

<u>Приклад.</u> Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0} x \sin x$.

Виходячи з означення границі, легко бачити, що $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, отже функція $\alpha(x) = x$ є нескінченно мала при $x \to 0$. Так як $|\sin x| \leq 1,\ x \in R$, то $g(x) = \sin x$ обмежена при $x \to 0$ і отже функція $\alpha(x) \cdot g(x) = x \sin x$ є нескінченно малою при $x \to 0$, тобто $\lim\limits_{x \to 0} x \sin x = 0$.

При умові, що відповідні границі існують та скінченні, мають місце наступні ***властивості границь***

1. $\lim\limits_{x \to a} C = C$, C – деяка стала.

2. $\lim\limits_{x \to a} (Cf(x)) = C \lim\limits_{x \to a} f(x)$, C – деяка стала.

3. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$,

4. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$,

5. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, при умові, що $g(x) \neq 0$ в деякому околі точки а.

Зауважимо, що властивості 3 – 5 відомі під назвою ***теореми про арифметичні дії з границями***.

6. Якщо $f(x) \le g(x)$ в деякому околі точки a, то $\lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x)$.

   Це – ***теорема про перехід до границі в нерівностях***.

7. ***Теорема про границю проміжної змінної***. Якщо в деякому околі точки a $f(x) \le g(x) \le h(x)$ і $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A$, то $\lim_{x \to a} g(x) = A$.

8. ***Теорема про границю монотонної послідовності***. Якщо послідовність x_n, $n \in N$ монотонно зростає (спадає) та обмежена зверху (знизу), для неї існує скінченна границя $A = \lim_{n \to \infty} x_n$.

   Нагадаємо, що послідовність x_n, $n \in N$ називається ***монотонно зростаючою*** (***спадною***), якщо для довільних значень $m, n \in N$ і таких, що $m < n$, виконується нерівність $x_m < x_n$ ($x_m > x_n$).

<u>Приклади.</u>

1. Знайти границю $\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 - 5n + 1}{7 - 2n - 4n^2}$.

   На основі теореми про арифметичні дії з границями маємо $\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 - 5n + 1}{7 - 2n - 4n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{3 - 5\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{7\frac{1}{n^2} - 2\frac{1}{n} - 4} = -\frac{3}{4}$, враховуючи, що $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ є нескінченно малими при $n \to \infty$.

2. Знайти границю $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x - 3}{7x^3 - 4x^2 - 2}$.

   Маємо $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x - 3}{7x^3 - 4x^2 - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} - 3\frac{1}{x^2}}{7 - 4\frac{1}{x} - 2\frac{1}{x^2}} = 0 \cdot \frac{2}{7} = 0$.

3. Знайти границю $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 3x - 8}{5x^2 - 2x + 4}$.

Як і в попередньому прикладі встановлюємо, що $\frac{5x^2-2x+4}{x^3+3x-8}$ є нескінченно малою величиною при $x\to\infty$, тому $\frac{x^3+3x-8}{5x^2-2x+4}$ – нескінченно велика при $x\to\infty$ і отже $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-8}{5x^2-2x+4}=\infty$.

Узагальнюючи наведені приклади можна твердити, що

$$\lim_{x\to\infty}\frac{B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_{m-1}x+B_m}{A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n}=\lim_{x\to\infty}\frac{B_0x^m}{A_0x^n}$$

$(m,n\in N,\ A_0,A_1,\ldots,A_{n-1},A_n,B_0,B_1,\ldots,B_{m-1},B_m\in R,\ A_0\neq 0)$.

Для випадку дійсних чисел

$a_n>a_{n-1}>\ldots>a_1>a_0\geq 0,\quad b_m>b_{m-1}>\ldots>b_1>b_0\geq 0$

також має місце подібний результат

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{B_0x^{b_m}+B_1x^{b_{m-1}}+\ldots+B_{m-1}x^{b_1}+B_mx^{b_0}}{A_0x^{a_n}+A_1x^{a_{n-1}}+\ldots+A_{n-1}x^{a_1}+A_nx^{a_0}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{B_0x^{b_m}}{A_0x^{a_n}}\ (A_0\neq 0).$$

4. Перша та друга визначні границі. Порівняння нескінченно малих величин. Асимптотична символіка.

Границя $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ називається ***першою визначною границею***, а границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ – ***другою визначною границею***. Друга визначна границя поширюється також на випадок дійсної змінної $x\in R$. Зауважимо, що коли $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, то на основі першої визначної границі та заміни $f(x)=t$, бачимо, що $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$. Аналогічно, якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, то

$\lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$. Тут a може бути як довільним дійсним числом, так і символом ∞.

Приклади.

1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$.

Враховуючи властивості границь і першу визначну границю, маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\cdot 1=1.$$

2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$.

Виконаємо тут заміну $\arcsin x=t$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left|\begin{matrix}\arcsin x=t,\\ x=\sin t,\ t\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}=1.$$

3. На основі першого прикладу аналогічно встановлюємо, що

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1.$$

4. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}$.

Виконуючи заміну $x-\frac{\pi}{2}=t$ та враховуючи формули зведення, властивості границь і першу визначну границю, маємо $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}=$

$$=\left|\begin{matrix}x-\frac{\pi}{2}=t,\\ x=\frac{\pi}{2}+t,\ t\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{\pi-2\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{-2t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{2}.$$

5. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Робимо заміну $\frac{1}{\sin x}=t$ та враховуємо другу визначну границю

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=\left|\begin{array}{c}\frac{1}{\sin x}=t,\\ t\to\infty\end{array}\right|=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e.$$

6. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

Маємо на основі другої визначної границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)\right)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1.$$

Тут перехід до границі під знаком логарифма є законним внаслідок того, що для елементарної функції $f(x)$ справедлива рівність $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to a}g(x))=f(A)$ при умові, що A – точка з області визначення $f(x)$ і $A=\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

7. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}$, $a>0$, $a\neq 1$.

За допомогою заміни $a^{x}-1=t$ та другої визначної границі одержуємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\left|\begin{array}{c}a^{x}-1=t,\ t\to 0\\ x=\log_{a}(1+t)\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_{a}(1+t)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_{a}(1+t)}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\cdot\log_{a}(1+t)\right)}=\frac{1}{\log_{a}(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\log_{a}e}=\ln a.$$

Зокрема $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$.

8. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n+1-2n^{2}}{n+3-2n^{2}}\right)^{\frac{n^{2}+3}{2-n}}$.

Виконаємо елементарні перетворення і одержимо на основі другої визначної границі $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n+1-2n^2}{n+3-2n^2}\right)^{\frac{n^2+3}{2-n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n-2}{n+3-2n^2}\right)^{\frac{n^2+3}{2-n}} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n-2}{n+3-2n^2}\right)^{\frac{n^2+3}{2-n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n-2}{n+3-2n^2}\right)^{\frac{n+3-2n^2}{4n-2}\cdot\frac{4n-2}{n+3-2n^2}\cdot\frac{n^2+3}{2-n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4n-2}{n+3-2n^2}\right)^{\frac{n+3-2n^2}{4n-2}}\right]^{\frac{4n-2}{n+3-2n^2}\cdot\frac{n^2+3}{2-n}} =$$

$$\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n-2}{n+3-2n^2}\right)^{\frac{n+3-2n^2}{4n-2}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-2}{n+3-2n^2}\cdot\frac{n^2+3}{2-n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{-2n^2}\cdot\frac{n^2}{-n}} = e^2 .$$

Перейдемо тепер до порівняння нескінченно малих величин. Нехай $\alpha(x), \beta(x)$ – нескінченно малі при $x\to a$, тобто $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$ і нехай існує деякий окіл точки a (без самої цієї точки), в якому $\alpha(x)\neq 0$, $\beta(x)\neq 0$. Тоді кажуть, що:

1. $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – ***нескінченно малі одного порядку*** при $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$, $A\in R$, $A\neq 0$. При цьому пишуть $\alpha(x)=O(\beta(x))$ (або $\beta(x)=O(\alpha(x))$, $x\to a$.
2. $\alpha(x)$ є ***нескінченно малою вищого порядку*** у порівнянні з $\beta(x)$ при $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ (або $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$). При цьому пишуть $\alpha(x)=o(\beta(x))$, $x\to a$.
3. $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – ***еквівалентні нескінченно малі*** при $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. При цьому пишуть $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $x\to a$.

Зауважимо, що коли $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to a$, то тоді $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{f(x)}$ та $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\beta(x)}$ для довільної функції $f(x)$, визначеної в деякому околі точки a $(x \neq a)$ і відмінної від нуля в цьому околі. На основі розглянутих раніше прикладів можна скласти наступну ***таблицю еквівалентних нескінченно малих***

$1. \sin x \sim x, \quad x \to 0;$ $\qquad 2. \operatorname{tg} x \sim x, \quad x \to 0;$ $\qquad 3. \arcsin x \sim x, \quad x \to 0;$

$4. \operatorname{arctg} x \sim x, \quad x \to 0;$ $\qquad 5. \ln(1+x) \sim x, \quad x \to 0;$ $\qquad 6. e^x - 1 \sim x, \quad x \to 0.$

Приклади.

1. Порівняти нескінченно малі a) $\alpha(x) = x - 1$, $\beta(x) = \sqrt{x} - 1$, $x \to 1$,

b) $\alpha(x) = 1 - \cos 3x$, $\beta(x) = x$, $x \to 0$.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}+1) = 2$, отже $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – нескінченно малі одного порядку при $x \to 1$, тобто $\alpha(x) = O(\beta(x))$, $x \to 1$.

b) Враховуючи, що $\sin\dfrac{3x}{2} \sim \dfrac{3x}{2}$, $x \to 0$, одержуємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{1-\cos 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{3x}{2}\right)^2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{9x}{2} = 0.$$

Отже $\alpha(x)$ є нескінченно малою вищого порядку у порівнянні з $\beta(x)$ при $x \to a$ і ми можемо записати $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \to 0$.

2. Знайти границі a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{\operatorname{arctg} 3x}$, b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{2-x}-1}{\cos\frac{\pi}{x}}$.

a) Так як $\ln(1-2x) \sim -2x$, $\operatorname{arctg} 3x \sim 3x$ при $x \to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{\operatorname{arctg} 3x} =$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x}{3x} = -\dfrac{2}{3}$

b) Враховуючи, що $e^{2-x} - 1 \sim 2 - x$, $x \to 2$, маємо $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{2-x}-1}{\cos\frac{\pi}{x}} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{\cos\frac{\pi}{x}}$. Виходячи з того, що $\dfrac{\pi}{x} \to \dfrac{\pi}{2}$ при $x \to 2$, виконаємо тут заміну $\dfrac{\pi}{x} - \dfrac{\pi}{2} = t$, після чого застосуємо формули зведення і таблицю еквівалентних нескінченно малих

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\cos\frac{\pi}{x}} = \left|\begin{array}{c} \frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{2} = t,\ t \to 0 \\ x = \frac{2\pi}{2t+\pi} \end{array}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{2 - \frac{2\pi}{2t+\pi}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{4t}{(2t+\pi)(-\sin t)} = -\lim_{t\to 0}\frac{4t}{(2t+\pi)\cdot t} = -\frac{4}{\pi}.$$

5. Неперервність функції однієї змінної. Одностороння неперервність. Точки розриву та їх класифікація.

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Дамо аргументу x_0 приріст Δx такої величини, щоб точка $x_0 + \Delta x$ не вийшла за межі даного околу. Тоді вираз $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ називається відповідним приростом функції $f(x)$ в точці x_0.

Якщо виконується умова $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0) = 0$, то тоді $f(x)$ називається ***неперервною в точці*** x_0. Зауважимо, що за допомогою заміни $x_0 + \Delta x = x$ дана умова може бути записана в наступному еквівалентному вигляді $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Як відомо, існування цієї двосторонньої границі еквівалентне існуванню наступних односторонніх границь $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$. Якщо лише $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ (або $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$), то кажуть, що $f(x)$ ***неперервна зліва*** (або ***справа***).

Функція $f(x)$ називається ***розривною*** в точці x_0, якщо не виконується хоча б одна з рівностей у співвідношенні $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

При цьому x_0 називають ***точкою розриву*** функції $f(x)$. Існує наступна ***класифікація (характер) точок розриву***

1. Якщо $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A$ (A – скінченне число), але $A \neq f(x_0)$ або $f(x_0)$ не існує, то x_0 називається ***усувною точкою розриву***.
2. Якщо $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = B$, $A \neq B$ (A, B – скінченні числа), то x_0 називається ***точкою розриву першого роду***. При цьому саме значення $f(x_0)$ може і не існувати.
3. Якщо хоча б одна з двох односторонніх границь $\lim_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$ не існує або рівна ∞ (саме значення $f(x_0)$ може не існувати), то x_0 називається ***точкою розриву другого роду***.

На рис. 2 зображено графік функції $y = f(x)$, що має три точки розриву:

x_1 – усувна точка розриву, причому $\lim_{x\to x_1-0} f(x) = \lim_{x\to x_1+0} f(x) = A \neq f(x_1)$.

x_2 – точка розриву першого роду, для якої $\lim_{x\to x_2-0} f(x) = B$,

$\lim_{x\to x_2+0} f(x) = C$, $A \neq B$, $f(x_2) = C$.

x_3 – точка розриву другого роду, для якої $\lim\limits_{x \to x_3 - 0} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x \to x_3 + 0} f(x) = +\infty$, а самого значення . $f(x)$ в точці x_3 не існує.

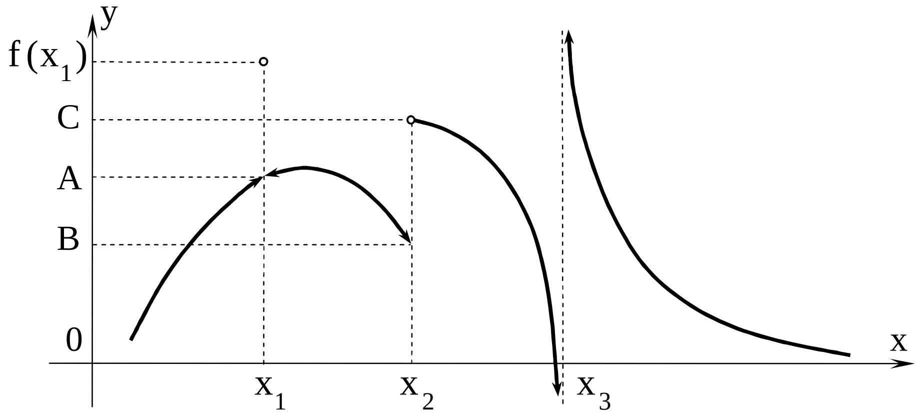

Рис. 2

Відзначимо, що всі основні елементарні функції

C (C – стала), x^{α} $(x > 0,\ \alpha \in R)$, a^x $(a > 0,\ a \neq 1)$, $\log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$, $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}x$, $\mathrm{ctg}x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}x$, $\mathrm{arcctg}x$

є неперервними в кожній точці, що лежить в області її визначення.

Приклади.

1. Довести, виходячи з означення, що функція $f(x) = \ln x$ неперервна для довільного значення $x > 0$.

При довільному значенні $x > 0$ і $|\Delta x| < x$ маємо: $\Delta f(x) = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$. Беремо довільне значення $\varepsilon > 0$ і розв'язуємо відносно Δx нерівність $\Delta f(x) < \varepsilon$: $\left|\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right| < \varepsilon$,

$-\varepsilon < \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) < \varepsilon$, $e^{-\varepsilon} - 1 < \frac{\Delta x}{x} < e^{\varepsilon} - 1$, $-x(1 - e^{-\varepsilon}) < \Delta x < x(e^{\varepsilon} - 1)$.

З відомої нерівності $a+\frac{1}{a}\geq 2\ (a>0)$ випливає, що $x(1-e^{-\varepsilon})<x(e^{\varepsilon}-1)$, тому, коли вибрати $\delta=x(1-e^{-x})$ і взяти $|\Delta x|<\delta$, то тоді $\Delta f(x)<\varepsilon$. Згідно з означенням границі це означає, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$ і отже $f(x)=\ln x$ є неперервною для довільного значення $x>0$.

2. Знайти точки розриву наступних функцій та визначити їх характер

a) $y=\frac{x^2-3x+2}{x^3-3x-2}$, b) $y=\frac{\sin x}{|x|}$, c) $y=\sin\frac{1}{x}$.

a) В даному випадку маємо елементарну функцію, яка неперервна всюди, крім точок, де її знаменник обертається в нуль. Це і будуть точки розриву даної функції, в яких вона не визначена і які легко знайти за допомогою схеми Горнера, випробовуючи числа $\pm 1, \pm 2$, як множники вільного члена в знаменнику

	1	0	-3	-2
1	1	1	-2	-4
-1	1	-1	-2	0

$x^3-3x-2=(x+1)(x^2-x-2)$.

Застосувавши теорему Вієта, остаточно одержимо $x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$, звідки випливає, що точками розриву будуть числа $x_1=-1,\ x_2=2$. Щоб полегшити обчислення границь при класифікації цих точок розриву, розкладемо і чисельник даної функції на множники за допомогою теореми Вієта:

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.

Нарешті обчислюємо відповідні границі (в цьому випадку – двосторонні) та проводимо класифікацію знайдених точок розриву.

$$\lim_{x\to x_1} y=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)^2(x-2)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)}{(x+1)^2}=\left[\frac{-2}{0}\right]=\infty.$$

Це означає, що обидві односторонні границі рівні ∞, а отже $x_1 = -1$ є точкою розриву другого роду. Для точки $x_2 = 2$ маємо

$$\lim_{x \to x_2} y = \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)^2 (x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{9}.$$

Так як при $x_2 = 2$ фунція не визначена, то ця точка розриву буде усувною.

b) Зразу бачимо, що єдиною точкою розриву є точка $x_0 = 0$. Обчислюємо односторонні границі, розкриваючи при цьому модуль та враховуючи першу визначну границю.

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} y = \lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{-x} = -1,$$

$$B = \lim_{x \to x_0 + 0} y = \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

A, B – дійсні числа, причому $A \neq B$, отже $x_0 = 0$ є точкою розриву першого роду.

c) Як і в попередному випадку, дана функція має єдину точку розриву $x_0 = 0$. Легко бачити, що при наближенні аргумента x до цієї точки $y = \sin \frac{1}{x}$ приймає всі значення з проміжку $[-1, 1]$ (наприклад, $y\left(\frac{2}{\pi(1+4n)}\right) = 1,\ y\left(\frac{1}{\pi n}\right) = 0, y\left(\frac{2}{\pi(-1+4n)}\right) = -1,\ n \in N$). Отже при будь-якому $0 < \varepsilon < 1$ і довільному значенні A не існує жодного $\delta > 0$ такого, щоб при всіх x, які задовольняють умову $0 < |x| < \delta$ відповідні значення функції $y = \sin \frac{1}{x}$ містилися в ε-околі точки A (тобто виконувалась нерівність $\left|\sin\frac{1}{x} - A\right| < \varepsilon$). Звідси випливає, що $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не існує, а $x_0 = 0$ є точкою розриву другого роду.

6. Властивості функцій однієї змінної, неперервних в точці та на відрізку.

Властивості неперервних в точці функцій

1. Якщо $u = u(x)$, $v = v(x)$ – неперервні в точці x_0 функції, то в цій точці будуть також неперервними наступні функції: Cu (C – стала), $u + v$, $u \cdot v$, $\frac{u}{v}$ $(v(x_0) \neq 0)$.
2. Якщо функція $u = u(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $v = v(y)$ неперервна в точці $y_0 = u(x_0)$, то тоді складна функція $v = v(u(x))$ буде неперервною в точці x_0.

З цих властивостей випливає, що кожна елементарна функція, що утворюється з основних елементарних функцій з допомогою скінченної кількості арифметичних дій над ними та скінченної кількості операцій утворення складних функцій з елементарних, буде неперервною в кожній точці, що належить до області визначення такої елементарної функції. Отже, якщо $f(x)$ – елементарна функція, а x_0 належить до області її визначення, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ця формула вже застосовувалась у деяких раніше розглянутих прикладах.

Властивості функцій, неперервних на відрізку

Функція $f(x)$ називається ***неперервною на інтервалі*** (a, b), якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу. Функція $f(x)$ називається ***неперервною на відрізку*** $[a, b]$, якщо вона неперервна на інтервалі (a, b), а в точках a та b – неперервна справа та зліва відповідно. Сформулюємо властивості таких функцій.

1. ***Теорема Вейєрштраса.*** Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a, b]$, то тоді вона досягає на цьому відрізку свого найбільшого M та найменшого m значень, тобто знайдуться такі $x_M, x_m \in [a, b]$, що $f(x_M) = M = \max\limits_{x\in[a, b]}\{f(x)\}$, $f(x_m) = m = \min\limits_{x\in[a, b]}\{f(x)\}$.
2. ***Теорема про проміжні значення неперервної на відрізку функції.*** Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a, b]$ і $M = \max\limits_{x\in[a, b]}\{f(x)\}$, $m = \min\limits_{x\in[a, b]}\{f(x)\}$, причому $M > m$, то для довільного значення C, що задовольняє умові $M > C > m$, знайдеться принаймні одне значення $x_C \in (m, M)$ таке, що $f(x_C) = C$.
3. ***Теорема про існування оберненої функції.*** Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a, b]$ і монотонно зростає (спадає) на ньому, то тоді на відрізку $[c, d]$ $([d, c])$, де $c = f(a)$, $d = f(b)$, існує неперервна монотонно зростаюча (спадна) функція $g(x)$, яка буде оберненою до даної і отже для неї $g(f(x)) \equiv x$, $x \in [a, b]$.

Слід відзначити, що графіком неперервної на відрізку чи інтервалі функції є суцільна крива.

РОЗДІЛ ІІ. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

1. Поняття похідної функції та її геометричний зміст. Знаходження похідної для елементарних функцій.

Розглянемо функцію $f(x)$, визначену в деякому околі точки x_0. Дамо аргументу x_0 приріст Δx такий, щоб точка $x_0 + \Delta x$ була в межах даного околу і утворимо відповідний приріст функції $f(x)$ в точці x_0 згідно з формулою $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то вона і називається ***похідною*** $f(x)$ в точці x_0 та позначається одним із символів $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$. При цьому кажуть, що $f(x)$ є ***диференційованою*** в даній точці. Отже за означенням маємо $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. З геометричної точки зору $f'(x_0)=k$, де k – кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0, f(x_0))$, тобто $f'(x_0)=tg(\alpha_0)$, α – кут нахилу цієї дотичної до напрямку осі OX. Справедливість даного висновку випливає з рис. 3.

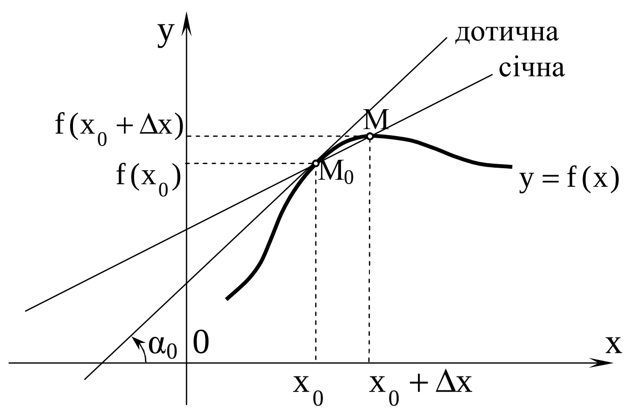

Рис. 3

На ньому видно, що при $\Delta x\to 0$ точка $M(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ наближається до точки $M_0(x_0, f(x_0))$, при цьому положення січної M_0M наближається до положення дотичної до графіка функції $y=f(x)$ в точці M_0, а $tg\alpha=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\to tg(\alpha_0)=k=f'(x_0)$. Тут α – кут нахилу січної M_0M до напрямку осі OX. На основі такого геометричного змісту похідної рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці M_0 має вигляд $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Для знаходження похідних елементарних функцій використовуються наступні правила диференціювання та таблиця похідних. В останній використано позначення для гіперболічних синуса, косинуса, тангенса і котангенса: $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$, $\mathrm{cth}x = \dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$.

Правила диференціювання

Тут $u = u(x)$, $v = v(x)$ – диференційовані в точці x функції.

1) $(C)' = 0$, якщо C – стала,

2) $(Cu)' = Cu'$ (C – стала),

3) $(u + v)' = u' + v'$,

4) $(uv)' = u'v + uv'$,

5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $v \neq 0$,

6) $[u(v(x))]' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$,

7) Якщо $u = u(x)$, $v = v(x)$ – взаємно обернені функції, то $v'(x) = \dfrac{1}{u'(v(x))}$ (або $u'(x) = \dfrac{1}{v'(u(x))}$).

Таблиця похідних

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $x > 0$, $\alpha \in R$,

$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$,

2) $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$,

$(e^x)' = e^x$,

3) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,

4) $(\sin x)' = \cos x$,

5) $(\cos x)' = -\sin x$,

6) $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

7) $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,

8) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$,

9) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 10) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,

11) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ 12) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, де, ,

13) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ 14) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

15) $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

<u>Приклад 1.</u> Знайти похідну функції $y = x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

Застосовуючи друге, третє, четверте і шосте правила диференціювання та першу і восьму формулу з таблиці похідних, маємо $y' = 1 - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\arcsin x - \sqrt{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 = \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

<u>Приклад 2.</u> Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = \frac{e^{x-x^2}}{x^2-2}$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Спочатку знаходимо похідну даної функції за допомогою першого, другого, третього, п'ятого і шостого правил диференціювання та першої і другої формул з таблиці похідних $y' = \frac{e^{x-x^2}(1-2x)(x^2-2) - e^{x-x^2}\cdot 2x}{(x^2-2)^2} =$

$= \frac{e^{x-x^2}(x^2-2-2x^3+4x-2x)}{(x^2-2)^2} = \frac{e^{x-x^2}(-2x^3+x^2+2x-2)}{(x^2-2)^2}$. Після цього

обчислюємо значення $y(x_0)$, $y'(x_0)$: $y(x_0) = y(1) = \frac{e^{1-1}}{1-2} = -1$, $y'(x_0) =$

$= y'(1) = \frac{e^{1-1}(-2+1+2-2)}{(1-2)^2} = -1$. Нарешті, використовуючи формулу

$y = y(x_0) + y'(x_0)\cdot(x - x_0)$, складаємо рівняння дотичної

$y = -1 + (-1)\cdot(x-1)$, $y = -1 - x + 1$, $y = -x$.

2. Похідна параметрично заданої та неявно заданої функції. Диференціал функції однієї змінної та його застосування до наближених обчислень.

Функцію $y = y(x)$ можна задати ***параметрично*** за допомогою рівнянь $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in (\alpha, \beta)$, t – параметр . В цьому випадку похідна $\frac{dy}{dx} = y'_x$ такої функції обчислюється за формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, де $y'_t = \frac{dy(t)}{dt}$, $x'_t = \frac{dx(t)}{dt}$. При цьому y'_x буде виразом, залежним від t, тобто $y'_x = y'_x(t)$. Нарешті, функцію $y = y(x)$ можна задати ***неявно*** за допомогою рівняння $F(x, y) = 0$. Щоб знайти похідну цієї функції, слід останнє рівняння продиференціювати по змінній x, вважаючи y функцією від x. Одержане рівняння міститиме $y' = y'(x)$. Розв'язуючи його відносно y', одержують вираз для y', залежний від x та від y.

<u>Приклад 1.</u> Скласти рівняння дотичної до кривої $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ в точці $M_0\left(-\frac{9\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{4}\right)$, що лежить на цій кривій.

Згідно із геометричним змістом похідної рівняння такої дотичної має вигляд $y = y_0 + k(x - x_0)$, де $x_0 = -\frac{9\sqrt{3}}{8}$, $y_0 = \frac{1}{4}$, $k = y'_x(t_0)$, t_0 – значення параметра t, що відповідає точці M_0. Внаслідок 2π-періодичності функцій $\cos^3 t, \sin^3 t$ його можна брати як розв'язок системи $\begin{cases} -\frac{9\sqrt{3}}{8} = 3\cos^3 t, \\ \frac{1}{4} = 2\sin^3 t, \end{cases}$ на довільному проміжку довжиною 2π. Розв'язуємо цю систему при $t \in [0,\ 2\pi]$

$$\begin{cases} -\frac{9\sqrt{3}}{8} = 3\cos^3 t, \\ \frac{1}{4} = 2\sin^3 t, \end{cases} \quad \begin{cases} \cos^3 t = -\frac{3\sqrt{3}}{8}, \\ \sin^3 t = \frac{1}{8}, \end{cases} \quad \begin{cases} \cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin t = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad t_0 = \frac{5\pi}{6}.$$

Тепер обчислюємо $k = y'_x\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{6\sin^2 t\cos t}{-9\cos^2 t\sin t} = -\frac{2}{3}\operatorname{tg} t,\ k = -\frac{2}{3}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6} = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

та записуємо рівняння дотичної $y = \frac{1}{4} + \frac{2}{3\sqrt{3}}(x + \frac{9\sqrt{3}}{8}),\ y = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}}x$.

Приклад 2. Скласти рівняння дотичної до кривої $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln(x^2 + y^2)$ в точці $M_0(-1,\ 0)$.

Так як $\operatorname{arctg}\frac{0}{-1} \equiv \ln(1+0)$, то точка M_0 лежить на даній кривій і отже рівняння дотичної шукаємо у вигляді $y = 0 + k(x+1)$. Тут $k = y'(-1,\ 0)$ – похідна у точці M_0 неявно заданої функції з допомогою рівняння $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln(x^2 + y^2)$. Щоб знайти цю похідну, диференціюємо дане рівняння по змінній x враховуючи, що $y = y(x)$,

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2},\ y'x - y = 2x + 2yy',\ y'(x - 2y) = y + 2x,$$

$y' = \frac{y + 2x}{x - 2y},\ y'(-1,\ 0) = \frac{0-2}{-1-0} = 2$, після чого записуємо рівняння дотичної $y = 2x + 2$.

Диференціалом $df(x_0)$ функції $f(x)$, що має похідну в точці x_0, називається та складова її приросту $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, яка є нескінченно малою одного порядку з Δx при $\Delta x \to 0$. При цьому інша складова $\Delta f(x_0)$ буде нескінченно малою вищого порядку у порівнянні з Δx і отже при досить малих Δx можна вважати, що $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$, причому це співвідношення тим точніше, чим менше Δx. Має місце формула $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$. Так як для незалежної змінної $dx = (x)'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$ при довільному значенні x, то останню формулу записують також у вигляді $df(x_0) = f'(x_0)dx$. Враховуючи це, можна записати $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$, або, що те саме

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Ця формула використовується для наближеного обчислення значень функцій при малих Δx.

<u>Приклад 3.</u> Обчислити наближено за допомогою диференціала $\sqrt{\dfrac{4{,}006}{0{,}997}}$.

Можна вважати, що потрібно обчислити значення функції $y(x) = \sqrt{\dfrac{6-2x}{x}}$ у точці $x + \Delta x = 0{,}997$. При цьому $x = 1$, $\Delta x = -0{,}003$ (Δx слід брати малим, а x таким, щоб легко обчислювалось значення $y(x)$), $y'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{6-2x}{x}}} \cdot \left(-\dfrac{6}{x^2}\right)$. Підставляючи все це у формулу $y(x + \Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x$, маємо

$$\sqrt{\frac{4{,}006}{0{,}997}} \approx \sqrt{\frac{6-2\cdot 1}{1}} + \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{6-2\cdot 1}{1}}} \cdot \left(-\frac{6}{1}\right) \cdot (-0{,}003) = 2 + \frac{0{,}018}{4} = 2{,}0045.$$

<u>Приклад 4.</u> Обчислити наближено за допомогою диференціала $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + 0{,}04\right)$.

Аналогічно $y = \mathrm{tg}x$, $x = \frac{\pi}{4}$, $\Delta x = 0{,}04$, $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}04\right) =$

$$= y(x + \Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \cdot 0{,}04 = 1 + 2 \cdot 0{,}04 = 1{,}08.$$

3. Похідні та диференціали вищих порядків.

Похідною n-того порядку (n-тою похідною) функції $f(x)$ в точці x називається вираз $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$, $n = 2, 3, \ldots$, якщо похідна $n-1$ порядку $f^{(n-1)}(x)$ диференційована в даній точці. При цьому $f^{(1)}(x) = f'(x)$, $f^{(2)}(x) = f''(x) = \left(f'(x)\right)'$, $f^{(3)}(x) = f'''(x) = \left(f''(x)\right)'$, $\ldots$.
Для позначення похідної n-того порядку функції $f(x)$ використовується також символ $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$. Зауважимо, що коли функція $y = y(x)$ задана параметрично за допомогою рівнянь $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in (\alpha, \beta)$, то її друга похідна $\frac{d^2 y}{dx^2} = y''_x$ по змінній x обчислюється за формулою $y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$, де $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$, $y'_t = \frac{dy}{dt}$, $x'_t = \frac{dx}{dt}$, $(y'_x)'_t = \frac{dy'_x}{dt}$. Аналогічно обчислюються похідні більш високих порядків параметрично заданої функції.

<u>Властивості похідних n-того порядку</u>

Якщо існують n-ті похідні функцій $u = u(x)$, $v = v(x)$, то тоді

1) $[Cu]^{(n)} Cu^{(n)}$, C – стала,

2) $[u + v]^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$,

3) $[uv]^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v'' +$

$$+\mathbf{K}+\frac{n(n-1)\cdot\mathbf{K}\cdot(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\mathbf{K}+nu'v^{(n-1)}+uv^{(n)}.$$

Остання формула називається ***формулою Лейбніца*** і записується також у компактному вигляді: $[uv]^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$, де

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdot\mathbf{K}\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!},\ u^{(0)}=u,\ v^{(0)}=v.$$

Приклад 1. Знайти y'', якщо $y=(x^3+3x)\operatorname{arctg}x$.

Знаходимо спочатку першу похідну: $y'=(3x^2+3)\operatorname{arctg}x+\dfrac{x^3+3x}{x^2+1}$.

Після цього одержуємо

$$y''=6x\operatorname{arctg}x+\frac{3(x^2+1)}{x^2+1}+\frac{3(x^2+1)^2-(x^3+3x)2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=6x\operatorname{arctg}x+3+3-\frac{2x^4+6x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=6x\operatorname{arctg}x+\frac{6x^4+12x^2+6-2x^4-6x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=6x\operatorname{arctg}x+\frac{4x^4+6x^2+6}{\left(x^2+1\right)^2}=2\left(3x\operatorname{arctg}x+\frac{2x^4+3x^2+3}{\left(x^2+1\right)^2}\right).$$

Приклад 2. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y=\sin x$.

Послідовно маємо, використовуючи формули зведення:

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ y''=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=-\cos x=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right),\ y^{(4)}=\sin x=\sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right).$$

Помічаючи тут закономірність, на n-тому кроці одержимо

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Аналогічно, якщо $y=\cos x$, то $y^{(n)}=\cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Приклад 3. Знайти $y^{(6)}$, якщо $y = (3 + 2x - x^2)\cos 2x$

Покладемо у формулі Лейбніца $v = 3 + 2x - x^2$, $u = \cos 2x$, тоді $v' = 2 - 2x$, $v'' = -2$, $v''' = \ldots = v^{(6)} = 0$ і отже у виразі для $y^{(6)}$ відмінними від нуля будуть лише перші три доданки, що містять похідні $u^{(6)}$, $u^{(5)}$, $u^{(4)}$. Для їх знаходження використаємо результат попереднього приклада, правило диференціювання складної функції і формули зведення:

$u^{(6)} = 2^6 \cos\left(2x + 6\frac{\pi}{2}\right) = -64\cos 2x$, $u^{(5)} = 2^5 \cos\left(2x + 5\frac{\pi}{2}\right) =$

$= -32\sin 2x$, $u^{(4)} = 2^4 \cos\left(2x + 4\frac{\pi}{2}\right) = 16\cos 2x$. Остаточно одержуємо

$$y^{(6)} = -64(3 + 2x - x^2)\cos 2x - 6 \cdot 32(2 - 2x)\sin 2x + \frac{6 \cdot 5}{2}16(-2)\cos 2x =$$

$$= 32(2x^2 - 4x - 21)\cos 2x + 384(x - 1)\sin 2x.$$

Диференціалом n-того порядку функції $f(x)$ в точці x називається вираз $d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x))$, $n = 2, 3, \ldots$, якщо $f(x)$ має похідну $f^{(n)}(x)$ в точці x. Для обчислення $d^n f(x)$ використовується формула $d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n$, де $dx^n = (dx)^n$.

Приклад 4. Знайти $d^3 y$, якщо $y = \ln x$.

Маємо: $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$, $y''' = \frac{2}{x^3}$ і отже $d^3 y = \frac{2dx^3}{x^3}$.

Властивості диференціалів n-того порядку

Якщо існують n-ті похідні функцій $u = u(x)$, $v = v(x)$, то тоді

4) $d^n[Cu] = Cd^n u$, C – стала,

5) $d^n[u + v] = d^n u + d^n v$,

$$d^n[uv] = vd^n u + ndvd^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{2}d^2 vd^{n-2}u + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}d^3 vd^{n-3}u +$$

$$+\mathbf{K}+\frac{n(n-1)\cdot\mathbf{K}\cdot(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\mathbf{K}+nu'v^{(n-1)}+uv^{(n)}.$$

4. Правило Лопіталя та розкриття деяких невизначеностей.

Розглянемо функції $f(x)$, $g(x)$, визначені в деякому околі точки a (крім, можливо, самої цієї точки), і нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, $g(x)\neq 0$ в даному околі. Тоді знаходження границі $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ називається ***розкриттям невизначеності*** виду $\frac{0}{0}$. Якщо при цьому $f(x)$, $g(x)$ диференційовані, $g'(x)\neq 0$, то розкриття такої невизначеності може бути здійснене за допомогою ***правила Лопіталя***, згідно з яким $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Зауважимо, що це правило залишається справедливим і тоді, коли $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. В останньому випадку знаходження границі $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ називається розкриттям невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$.

До розкриття розглянутих невизначеностей виду $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ зводяться задачі знаходження наступних границь (розкриття невизначеностей виду $0\cdot\infty$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}, $\infty-\infty$)

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$, де $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Маємо невизначеність виду $0\cdot\infty$, вона зводиться до невизначеності виду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ наступним чином: $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)}$ або $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)}$.

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, де $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Знаходження такої границі називається розкриттям невизначеності виду 1^{∞}, що зводиться до попередньої в такий спосіб: $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=e^{A}$, де $A=\lim\limits_{x\to a}[g(x)\cdot\ln(f(x))]$.
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, де $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. Тут маємо невизначеність виду 0^{0}. Аналогічно до попереднього випадку $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=e^{A}$, $A=\lim\limits_{x\to a}[g(x)\cdot\ln(f(x))]$. Знаходження останньої границі – це розкриття невизначеності виду $0\cdot\infty$, що розглядалось раніше.
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, де $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. Як і в попередніх випадках, розкриття даної невизначеності виду ∞^{0} відбувається наступним чином: $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=e^{A}$, $A=\lim\limits_{x\to a}[g(x)\cdot\ln(f(x))]$, де знаходження останньої границі – це розкриття раніше розглянутої невизначеності виду $0\cdot\infty$.
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$, де $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Формально ця невизначеність виду $\infty-\infty$ з допомогою перетворення $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to a}\left[\left(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right)\cdot f(x)\cdot g(x)\right]$ теж зводиться до невизначеності виду $0\cdot\infty$, але слід мати на увазі, що в багатьох випадках існують більш прості перетворення.

Слід відзначити, що все викладене залишається справедливим і тоді, коли у відповідних границях замість $x\to a$ брати $x\to\infty$. При розв’язуванні всіх наступних прикладів у дужках буде зазначатись вид невизначеності, що розкривається.

Приклад 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\mathrm{arctg}x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

Встановивши вид невизначеності, застосовуємо правило Лопіталя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi-2\mathrm{arctg}x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{2}{1+x^2}}{\dfrac{x}{x+1}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(x^2+x)}{1+x^2}=2.$$

Приклад 2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\ln(1-x)+\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\mathrm{ctg}\pi x}$.

Так як $x<1$, то $x\to 1-0$ і отже маємо $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{-\ln(1-x)+\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\mathrm{ctg}\pi x}=$

$=\lim\limits_{x\to 1-0}\left[\dfrac{-\ln(1-x)}{\mathrm{ctg}\pi x}+\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\mathrm{ctg}\pi x}\right]=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{-\ln(1-x)}{\mathrm{ctg}\pi x}+\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\mathrm{ctg}\pi x}$ при умові, що останні дві границі існують та скінченні. Знаходимо їх за допомогою правила Лопіталя, яке застосовуємо двічі та тричі:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{-\ln(1-x)}{\mathrm{ctg}\pi x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 1-0}\frac{-\pi\sin^2\pi x}{1-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\frac{-2\pi^2\sin\pi x\cos\pi x}{-1}=0,\ \lim_{x\to 1-0}\frac{\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\mathrm{ctg}\pi x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 1-0}\frac{-\dfrac{\pi}{2}\sin^2\pi x}{\pi\cos^2\dfrac{\pi x}{2}}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1-0}\frac{\pi^2\sin\pi x\cos\pi x}{\pi^2\cos\dfrac{\pi x}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1-0}\frac{\sin 2\pi x}{\sin\pi x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{2\pi\cos 2\pi x}{\pi\cos\pi x}=-2$. Остаточно $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\ln(1-x)+\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\mathrm{ctg}\pi x}=0-2=-2$.

Приклад 3. Знайти границю $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^n e^{-\beta x})$, $n\in N$, $\beta>0$.

Маємо, застосовуючи після відповідного перетворення n раз правило Лопіталя: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^n e^{-\beta x}) = (\infty\cdot 0) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\beta x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\beta e^{\beta x}} =$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-1}}{\beta^2 e^{\beta x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \mathbf{K} = \lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)\cdot\mathbf{K}\cdot 2\cdot 1}{\beta^n e^{\beta x}} = 0.$$

<u>Приклад 4.</u> Знайти границю $\lim\limits_{x\to 3}\left(2-\frac{x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$.

Маємо невизначеність виду 1^∞, тому шукаємо дану границю наступним чином: $\lim\limits_{x\to 3}\left(2-\frac{x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}} = e^A$, де $A = \lim\limits_{x\to 3}\left[\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}\cdot\ln\left(2-\frac{x}{3}\right)\right] =$

$= (\infty\cdot 0) = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln\left(2-\frac{x}{3}\right)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{6}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6\sin^2\frac{\pi x}{6}}{3\left(2-\frac{x}{3}\right)\pi} = \dfrac{2}{\pi}$. Враховуючи це, остаточно одержуємо $\lim\limits_{x\to 3}\left(2-\frac{x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}} = e^{\frac{2}{\pi}}$.

<u>Приклад 5.</u> Знайти границю $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$.

І в цьому випадку, розкриваючи невизначеність виду 0^0, маємо $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi} = e^A$, де $A = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x-\pi)\ln\operatorname{tg}x = (0\cdot\infty) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\left(\frac{1}{2x-\pi}\right)} =$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-(2x-\pi)^2}{2\operatorname{tg}x\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-(2x-\pi)^2}{2\sin x\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-(2x-\pi)^2}{\sin 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-4(2x-\pi)}{2\cos 2x} = \dfrac{0}{-2} = 0$. Отже $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi} = e^0 = 1$.

<u>Приклад 6.</u> Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

Дана невизначеність виду ∞^0 розкривається аналогічно до того, як це робилось і в попередньому прикладі: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx} = e^A$. Тут

$$A = \lim_{x\to 0} tgx \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{ctgx} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin^2 x}{-x^2} = 0,$$

враховуючи першу визначну границю. Тому $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx} = e^0 = 1$.

<u>Приклад 7.</u> Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right]$.

Ця невизначеність виду $\infty - \infty$ за допомогою простого перетворення зводиться до невизначеності виду $\frac{0}{0}$, до розкриття якої двічі застосовується правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

5. Умови монотонності та необхідні і достатні умови існування екстремуму функцій однієї змінної. Знаходження найбільшого і найменшого значень неперервної на відрізку функції.

Функція $f(x)$ називається ***монотонно зростаючою*** (***спадною***) на інтервалі (a, b), якщо вона визначена на цьому інтервалі і для довільних двох значень $x_1, x_2 \in (a, b)$, таких, що $x_1 < x_2$, виконується умова $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$. Мають місце наступні твердження:

1) Якщо $f(x)$ диференційована на (a, b) і $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ при всіх $x \in (a, b)$, то $f(x)$ монотонно зростає (спадає) на інтервалі (a, b). Це ***достатня умова монотонного зростання*** (***спадання***) $f(x)$ на даному інтервалі.
2) Якщо $f(x)$ диференційована на (a, b) і монотонно зростає (спадає) на даному інтервалі, то $f'(x) \geq 0$ $\left(f'(x) \leq 0\right)$ при всіх $x \in (a, b)$. Це ***необхідна умова монотонного зростання*** (***спадання***) $f(x)$ на (a, b).

З геометричної точки зору те, що при монотонному зростанні (спаданні) диференційованої функції $f(x)$ її похідна задовольняє умові $f'(x) \geq 0$ $\left(f'(x) \leq 0\right)$, означає, що дотична до графіка функції $y = f(x)$ в довільній точці $M(x, f(x))$, $x \in (a, b)$ утворює з напрямком осі OX невід'ємний (не додатний) гострий кут α, причому $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$. Це проілюстровано на рис. 4 для монотонно зростаючої функції $y = f(x)$, а на рис. 5 – для монотонно спадної.

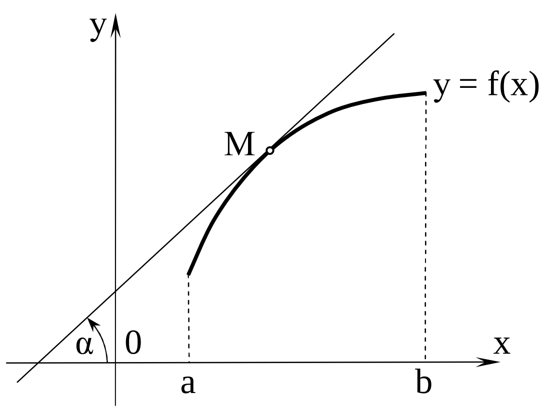

Рис. 4

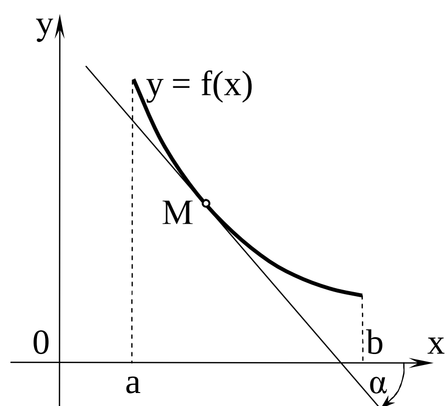

Рис. 5

Розглянемо тепер функцію $f(x)$, визначену в деякому околі точки x_0. Говорять, що ця функція має в цій точці ***максимум*** (***мінімум***), якщо при всіх досить близьких значеннях x до x_0 (але $x \neq x_0$) буде виконуватись нерівність $f(x) < f(x_0)$ $\left(f(x) > f(x_0)\right)$. Точки, в яких функція має максимум або мінімум, називаються її ***точками екстремуму***. При знаходженні таких точок використовують ***необхідні та достатні умови існування екстремуму***, які можна сформулювати наступним чином:

1) Необхідні умови існування екстремуму. Якщо функція $f(x)$ неперервна та диференційована в деякому околі точки x_0 і має в цій точці екстремум, то $f'(x_0)=0$.
2) Достатні умови існування екстремуму.
   a) Нехай функція $f(x)$ є неперервною в деякому околі точки x_0 та диференційованою в цьому околі (за винятком, можливо, самого значення x_0). Тоді, якщо при переході зліва направо через точку x_0 похідна $f'(x)$ міняє своє значення з додатного на від'ємне (з від'ємного на додатнє), то $f(x)$ має в даній точці максимум (мінімум).
   b) Нехай функція $f(x)$ є двічі неперервно диференційованою в деякому околі точки x_0 і нехай $f'(x_0)=0$. Тоді, якщо $f''(x_0)<0$ $\left(f''(x_0)>0\right)$, то $f(x)$ має в даній точці максимум (мінімум).

Порядок дослідження функції на екстремум наступний. Спочатку знаходять її ***критичні точки***, тобто точки, де похідна рівна нулю (тобто, де виконується необхідна умова існування екстремуму) або не існує. Після цього в кожній з таких точок за допомогою достатніх умов існування екстремуму визначають, чи буде вона точкою максимуму або мінімуму, чи не буде в ній екстремуму взагалі. Найчастіше для цієї мети використовують перший варіант достатніх умов існування екстремуму, поєднуючи їх з дослідженням функції на монотонність.

Приклад 1. Знайти проміжки монотонності та дослідити на екстремум функцію $y=(x-5)^2\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

Областю визначення цієї функції є проміжок $(-\infty,\,+\infty)$. Знайдемо її критичні точки, проаналізувавши похідну

$$y' = 2(x-5)\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2} + \frac{2(x-5)^2}{3\sqrt[3]{x+1}} = \frac{6(x-5)(x+1)+2(x-5)^2}{3\sqrt[3]{x+1}} =$$

$$= \frac{2(x-5)(4x-2)}{3\sqrt[3]{x+1}} = \frac{4(x-5)(2x-1)}{3\sqrt[3]{x+1}}.$$

Ця похідна не існує при $x=-1$, крім того $y'=0$ при $x=5$ та при $x=\frac{1}{2}$, отже точки $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=5$ є критичними точками даної функції, що розбивають область визначення на чотири інтервали, на кожному з яких y' зберігає знак. Методом змійки встановлюємо, який саме знак має y'. Після цього за допомогою достатніх умов існування екстремуму визначаємо, чи буде кожна з критичних точок точкою екстремуму і якщо так, то чи точкою максимуму, чи мінімуму. Одержані результати зручно послідовно заносити в наступну таблицю

x	$(-\infty,\ -1)$	-1	$\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},\ 5\right)$	5	$(5,\ +\infty)$
y'	–	не існує	+	0	–	0	+
y	↘	min	↗	max	↘	min	↗

В цій таблиці символами ↘ , ↗ позначено монотонне спадання та монотонне зростання функції на відповідному інтервалі, символами min, max відзначено відповідно точки мінімуму та максимуму. Результати аналізу таблиці можна сформулювати в такий спосіб:

– функція монотонно спадає на множині $(-\infty,\ -1)\cup\left(\frac{1}{2},\ 5\right)$,

– функція монотонно зростає на множині $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)\cup(5,\ +\infty)$,

– функція має один максимум в точці $x_{max}=\frac{1}{2}$, при цьому $y_{max}=\frac{81}{4}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$,

– функція має два мінімуми в точках $x_{\min 1} = -1$, $x_{\min 2} = 5$, при цьому $y_{\min 1} = y_{\min 2} = 0$.

Зауважимо, що розглянуті максимуми та мінімуми функції $f(x)$ є ***локальними***, тобто такими, що характеризують її поведінку лише в деякому околі, що може бути досить малим. З другого боку згідно з теоремою Вейєрштраса всяка неперервна на відрізку $[a, b]$ функція досягає на ньому свого найбільшого M та найменшого m значень. Ці значення M і m відповідно називаються ***глобальними*** максимумами та мінімумами функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і знаходяться наступним способом:

– знаходяться критичні точки функції на інтервалі (a, b),
– обчислюються значення функції в цих точках та при $x = a$, $x = b$,
– серед одержаних значень вибирається найбільше та найменше, що і будуть рівними M та m відповідно.

<u>Приклад 2.</u> Знайти найбільше M та найменше m значення функції $y = x^3 + 9x^2 + 15x + 12$ на відрізку $[-6, 2]$.

Сама функція та її похідна $y' = 3x^2 + 18x + 15$ визначені при всіх $x \in (-\infty, +\infty)$. Знаходимо критичні точки на інтервалі $(-6, 2)$, де $y' = 0$:

$3x^2 + 18x + 15 = 0$, $x^2 + 6x + 5 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = -5$.

Обчислюємо значення даної функції в знайдених точках та на кінцях відрізка $[-6, 2]$:

$x = -6, \quad y = -216 + 324 - 90 + 12 = 30$,

$x = -5, \quad y = -125 + 225 - 75 + 12 = 37$,

$x = -1, \quad y = -1 + 9 - 15 + 12 = 5$,

$x = 2, \quad y = 8 + 36 + 30 + 12 = 86$.

Так як $\max\{30, 37, 5, 86\} = 86$, $\min\{30, 37, 5, 86\} = 5$, то $M = 86$ при $x = 2$ та $m = 5$ при $x = -1$.

6. Умови опуклості та вгнутості графіка функції однієї змінної, точки перегину. Асимптоти кривих та побудова графіка функції.

Розглянемо функцію $f(x)$, диференційовану на інтервалі (a, b). Графік такої функції має дотичну в кожній точці $M(x, f(x))$, $x \in (a, b)$. Відповідна крива називається ***опуклою*** (***вгнутою***) при $x \in (a, b)$, якщо всі її точки лежать нижче (вище) довільної дотичної, побудованої в точці $M(x, f(x))$, $x \in (a, b)$, за винятком самої точки дотику. Дане означення ілюструється на рис. 6 (опукла крива) та рис. 7 (вгнута крива).

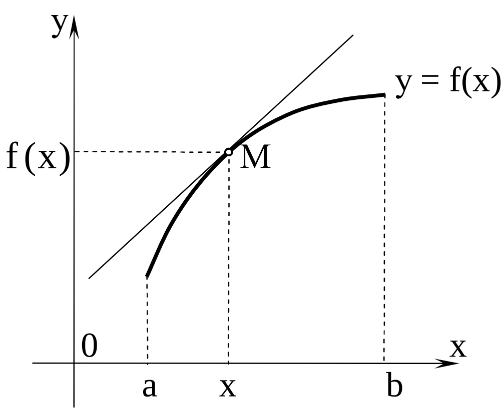

Рис. 6

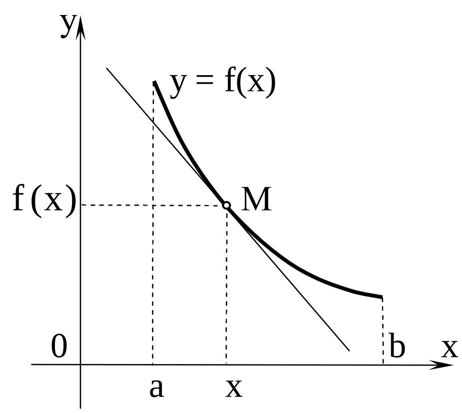

Рис. 7

Мають місце наступні ***достатні умови опуклості та вгнутості*** графіка функції $y = f(x)$:

Якщо $f(x)$ двічі диференційована на (a, b) і, крім того, $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) при всіх $x \in (a, b)$, то крива, що описується рівнянням $y = f(x)$, буде опуклою (вгнутою) для всіх значень $x \in (a, b)$.

Точки, що відділяють опуклу частину кривої від вгнутої, називаються ***точками перегину***. Зауважимо, що дослідження графіка функції на опуклість та вгнутість одночасно зі знаходженням точок перегину зручно робити за допомогою такої ж таблиці, що заповнювалась у прикладі при дослідженні функції на монотонність.

Приклад 1. Дослідити графік функції $y = e^{-x^2}$ на опуклість та вгнутість, знайти його точки перегину.

Дана функція для всіх $x \in R$ має другу похідну, причому

$$y' = -2xe^{-x^2},\ y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

Щоб застосувати достатні умови достатні умови опуклості та вгнутості графіка функції, розв’язуємо нерівність (в складніших випадках використовуємо метод змійки): $y' > 0$, $2(2x^2 - 1)e^{-x^2} > 0$, $2x^2 - 1 > 0$,

$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$. Аналогічно $y' < 0$ при $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Результати заносимо в таблицю

x	$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$
y''	+	0	–	0	+
y	$\smile$	Точка перегину	$\frown$	Точка перегину	$\smile$

В цій таблиці символами $\smile$, $\frown$ позначено вгнутість та опуклість графіка функції на відповідному проміжку. Записуємо результати аналізу таблиці

– графік функції вгнутий при $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$,

– графік функції опуклийй при $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

– точки перегину: $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ та $M_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

Розглянемо, нарешті, задачу знаходження ***асимптот*** графіка функції однієї змінної. Нагадаємо, що асимптотою L деякої кривої Г називається пряма, віддаль до якої точки М, що лежить на Г і необмежено віддаляється від початку координат, прямує до нуля. Розрізняють два види асимптот – ***вертикальні*** та ***похилі***. Якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ (тобто точка а є точкою розриву другого роду), то пряма $x=a$ буде вертикальною асимптотою графіка функції $y=f(x)$. Необхідною і достатньою умовою існування похилих асимптот кривої $y=f(x)$ є умова одночасного існування таких двох скінченних границь:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

В цьому випадку пряма $y=kx+b$ буде похилою асимптотою графіка функції $y=f(x)$.

Слід мати на увазі, що коли існують лише односторонні розглянуті границі (правосторонні або лівосторонні), то такими ж асимптотами (правосторонніми або лівосторонніми) будуть називатися і відповідні вертикальні та похилі асимптоти.

<u>Приклад 2.</u> Знайти асимптоти кривої $y=\dfrac{x^3-2x^2-3x+10}{x^2+x-2}$.

Шукаємо спочатку вертикальні асимптоти, які можуть бути лише при наявності точок розриву другого роду. Дана функція неперервна всюди, крім точок $x=1$, $x=-2$, в яких її знаменник рівний нулю. Досліджуємо характер знайдених точок розриву:

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-2x^2-3x+10}{x^2+x-2}=\left(\dfrac{6}{0}\right)=\infty$ і отже пряма $x=1$ є вертикальною асимптотою даної кривої.

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3-2x^2-3x+10}{x^2+x-2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2-4x-3}{2x+1}=\dfrac{17}{-3}$, точка $x=-2$ – це усувна точка розриву, пряма $x=-2$ не буде вертикальною асимптотою.

Шукаємо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2-3x+10}{x(x^2+x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3}=1,\ b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-2x^2-3x+10}{x^2+x-2}-x\right)= \lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2-x+10}{x^2+x-2}= \lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2}{x^2}=-3,$$

отже пряма $y = x - 3$ є похилою асимптотою даної кривої.

Проміжки монотонності, екстремуми функції $y = f(x)$, опуклість та вгнутість, асимптоти її графіка разом з іншими характеристиками дають досить інформації для побудови цього графіка. Можна рекомендувати наступну послідовність кроків при побудові графіка функції $y = f(x)$

1) встановлення області визначення функції $f(x)$,
2) дослідження даної функції на парність та непарність, періодичність,
3) знаходження точок перетину графіка даної функції з осями координат,
4) наявність точок розриву та їх класифікація,
5) знаходження вертикальних та похилих асимптот,
6) дослідження на монотонність та екстремум функції $f(x)$,
7) дослідження на опуклість та вгнутість графіка цієї функції, знаходження точок перегину,
8) побудова графіка функції $y = f(x)$, використовуючи всі одержані результати.

<u>**Приклад 3.**</u> Побудувати графік функції $y = x - 2\mathrm{arctg}x$.

1) Функція визначена при всіх $x \in R$,
2) Непарна, тому що $y(-x) \equiv -y(x)$, $x \in R$, отже графік цієї функції буде симетричним відносно початку координат,
3) Точкою перетину графіка даної функції з осями координат є точка $(0,\ 0)$, тобто початок координат,
4) Функція неперервна при всіх $x \in R$, як і всяка елементарна функція, що є неперервною в кожній точці області свого визначення,
5) Вертикальних асимптот не існує, бо немає точок розриву. Шукаємо

похилі асимптоти: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2\mathrm{arctg}x}{x}\right)=1$,

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-2\mathrm{arctg}x)=\mp\pi$. Отже графік даної функції має лівосторонню асимптоту $y=x+\pi$ та правосторонню – $y=x-\pi$,

6) Досліджуємо функцію на монотонність та екстремум за допомогою першої похідної: $y'=1-\frac{2}{1+x^2}=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, критичними точками (там, де $y'=0$) будуть точки $x_1=-1$, $x_2=1$. Заповнюючи та аналізуючи таблицю

x	$(-\infty,\,-1)$	-1	$(-1,\,1)$	1	$(1,\,+\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

робимо висновок, що дана функція зростає при $x\in(-\infty,\,-1)\cup(1,\,+\infty)$ та спадає при $x\in(-1,\,1)$. Крім того, точки $M_1\left(-1,\,-1+\frac{\pi}{2}\right)$, $M_2\left(1{,}1-\frac{\pi}{2}\right)$ будуть відповідно точкою максимума та мінімума,

7) За допомогою другої похідної досліджуємо криву на опуклість та вгнутість, знаходимо точки перегину: $y''=\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2-1)^2}=\frac{4x}{(x^2-1)^2}$, отже друга похідна міняє знак при $x=0$. Заповнюючи та аналізуючи таблицю

x	$(-\infty,\,0)$	0	$(0,\,+\infty)$
y''	–	0	+
y	$\frown$	Точка перегину	$\smile$

бачимо, що крива опукла при $x\in(-\infty,\,0)$ та вгнута, коли $x\in(0,\,+\infty)$. Точка $M_3(0,\,0)$ (тобто початок координат) є точкою перегину,

8) Використовуючи всі одержані результати, будуємо графік функції

$y = x - 2\mathrm{arctg}x$. Результат зображено на рис 8.

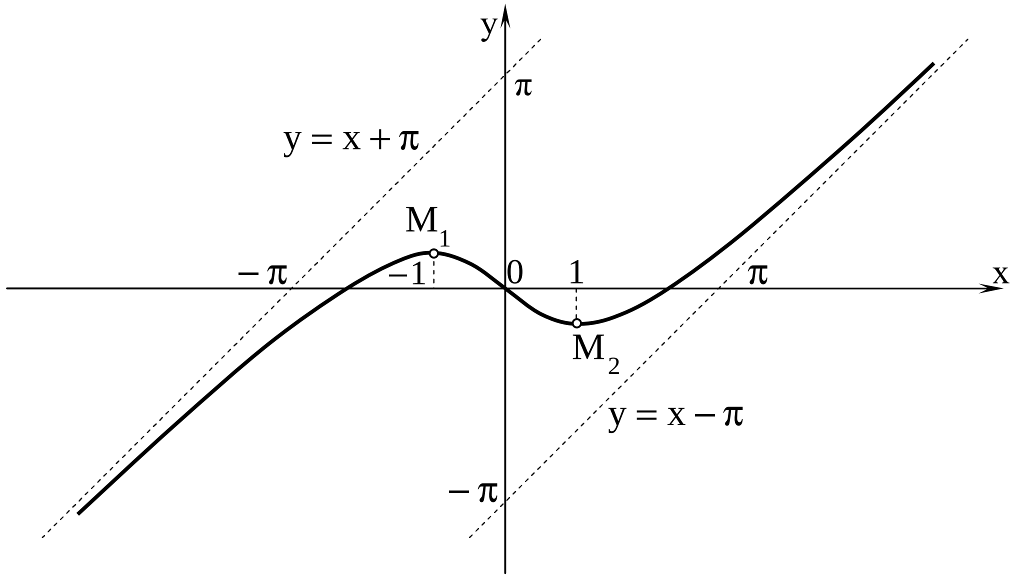

Рис. 8

З цього рисунку, зокрема, випливає що графік даної функції має ще дві точки перетину з віссю OX. Їх абсциси знаходяться наближено за допомогою методів обчислювальної математики.

РОЗДІЛ ІІІ. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

І. Знайти границю (не використовуючи правило Лопіталя)

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-4x+2}{x^2+x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-x^2-x-2}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x^2-10x+21}{x^2+4x-21}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+4x+5}$

5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+x^2+5x+14}{x^2-2x-8}$

6. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-2x-15}{x^3+x^2-x+15}$

7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-2x^2-5x-12}{x^2-3x-4}$

8. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{x^3+5x^2+6x+8}$

9. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-6x^2+25}{x^2-8x+15}$

10. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+3x-10}{x^3+6x^2+8x+15}$

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-3x+1}{x^2+6x-7}$

12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^3-x^2-5x-2}$

13. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{2x^2-5x-3}$

14. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-5x-6}$

15. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+7x+2}{x^2-6x-16}$

16. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+7x+3}{x^2-5x-24}$

17. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{3x^2-13x+4}$

18. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-9x-5}{x^2-7x+10}$

19. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3x^2+13x+4}{2x^2+7x-4}$

20. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{3x^2+14x-5}{x^2+4x-5}$

21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-9x+8}$

22. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2+6x-16}$

23. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-2x-3}$

24. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4x^2-17x+4}{x^2+4x-32}$

25. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2-26x+5}{x^2+x-30}$

26. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+3x-1}{x^2-6x-7}$

27. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{8x^2+15x-2}{x^2-7x-18}$

28. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6x^2+17x-3}{x^2-4x-21}$

29. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{8x^2+31x-4}{x^2-5x-36}$

30. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{10x^2+49x-5}{x^2+3x-10}$

II. Знайти границю

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x^3}{\sqrt[3]{8x^9-7x^7+3}}$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+3}}{2x^2-5x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x+25}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{2x+2}-1}{4x^2-1}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+5}-\sqrt[3]{4x^2+x}}{3x+7}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-4}-\sqrt{x}}{2x^2-x-6}$

8. $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{2x+2}-1}{27x^3+8}$

9. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{3x-8}}{x^2-9x+8}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+2}{\sqrt[3]{x^4-x^2}+\sqrt[3]{2x^2-x}}$

11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+3}}{x^2+2x-8}$

12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-3x+5}-2x}{\sqrt[3]{x^3+2x^2}}$

14. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{12x^2-1}-\sqrt{4x^2+1}}{2x-1}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt[3]{4x^4+3x}}{3x+8}$

16. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{6x+6}}{9x^2-4}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x}}{3x}$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^2-3x+2}+3x}{\sqrt[3]{x^3-7x^2}-5x}$

19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{2x+6}}{x^2+6x+5}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{5x^4-3x^3+2}}{\sqrt[4]{x^5-3x^2+7}}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+8}-2}{x^2}$

22. $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{4x^2+25}-2x\right)$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{2x+9}}{4x^2-3x}$

27. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{12x-3}}{3x^2-4x+1}$

24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{5x-1}}{x^2+x-2}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

25. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+3x-1}{\sqrt{5x+6}-\sqrt{3x+4}}$

29. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^5-3x^2+2}}{\sqrt[4]{2x^7-3x^2}-5x}$

26. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}}$

30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{5x-1}}{x^2+x-2}$

III. Знайти границю

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-4}{3n+5}\right)^{\frac{n^2}{1-n}}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-n^2+1}{2n-n^2-1}\right)^{1-n^2}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+5n-3}{n^2+4n+1}\right)^{1+2n}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2n^2+4}{2n-2n^2+3}\right)^{\frac{n^2+2n}{n+1}}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-7}{5n+1}\right)^{\frac{1-n-n^2}{n}}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n-2}\right)^{\frac{n^3+1}{2n^2-1}}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2-3n-4}{2n^2-3n-3}\right)^{2n^2+1}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2-5n-1}{2n^2-n+1}\right)^{2-3n}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-2}\right)^{n-n^2}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-n+2}{3n^2-2n+3}\right)^{1-3n}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3+3n-5}{2n^3+2}\right)^{3n^2+n-1}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-2n}{7-2n}\right)^{\frac{3n-1}{4}}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2-2n+1}{5n^2+7}\right)^{n+2}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-2n-n^2}{3n-n^2}\right)^{1-n}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2-n}{5-n}\right)^{1-n}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-7}{2n-1}\right)^{\frac{2n^2+n}{n+1}}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{3n-5}\right)^{\frac{7-n}{2}}$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-n^3}{1-n-n^3}\right)^{n^2}$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+n-n^2}{2-2n-n^2}\right)^{n}$

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n-2}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2+2n}{n+1}}$

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{2-n}$

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-4}{n+5}\right)^{1-2n}$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n-2}{5n+1}\right)^{\frac{n-3}{2}}$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)^{\frac{n+2}{3}}$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3-2n}{5-2n}\right)^{\frac{n-2}{5}}$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-n-n^2}{3-n-n^2}\right)^{7-n^2}$

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n+1}{7n-2}\right)^{1-5n}$

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n-7}\right)^{\frac{2n^2}{n-1}}$

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3-5n-n^2}{3-4n-n^2}\right)^{2-3n}$

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-4}{2n+5}\right)^{\frac{2n^2}{1-3n}}$

IV. Знайти границю

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{1-\cos 2x}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-2x}-1}{\arcsin 7x}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x}\cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sin 2x}$

4. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{e^{1-x}-1}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos 6x}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot(e^{-3x}-1)}{\sin 5x\cdot \operatorname{tg}2x}$

7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\ln(1-3x)}$

8. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(1-x)}{\ln(2-x)}$

9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x\cdot\sin 3x}$

10. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x+\sin x}{\operatorname{tg}5x}$

11. $\lim\limits_{x\to2}\frac{\cos\frac{\pi x}{4}}{\ln(3-x)}$

12. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x-\sin x}{\operatorname{arctg}7x}$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg}^2 x \cdot \ln(1-x^2)$

14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\arcsin(2-x)}{\ln \dfrac{x}{2}}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{-\sqrt{x}}-1)\cdot \operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sin 3x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{1-\cos\sqrt{x}}$

17. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x}{\operatorname{arctg}(x-1)}$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 7x - \cos 5x}{1-\cos 4x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 9x - \cos x}{\operatorname{tg}x \cdot \arcsin 2x}$

20. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x+1}$

21. $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \operatorname{ctg}^2 x \cdot \arcsin 2x$

22. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg}4x \cdot \ln(1-2x)$

23. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\cos \pi x}{\operatorname{tg}2\pi x}$

24. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg}3x \cdot (e^{-2x}-1)$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{5x^2 - x}$

26. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x}{\ln(3-2x)}$

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\arcsin 2x}$

28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{e^{-5x}-1}$

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot(\sqrt{4-x}-2)}{1-\cos 2x}$

30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9-x^2}-3}{x\cdot(e^{5x}-1)}$

V. Знайти точки розриву функції та визначити їх характер

1. $y = \dfrac{5x^2 - x - 4}{x^2 + 2x - 3}$

2. $y = \dfrac{1}{2 + 3^{\frac{1}{x+1}}}$

3. $y = \dfrac{5x^2 - 3x - 2}{x^2 + x - 2}$

4. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x-2}$

5. $y = \dfrac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}$

6. $y = 5^{\frac{2}{x}}$

7. $y = \dfrac{3x^2 + 5x - 8}{x^2 + 4x - 5}$

8. $y = \arcsin\dfrac{1}{2x-1}$

9. $y = \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{2x^2 + x - 3}$

10. $y = \dfrac{1}{5^x - 1}$

11. $y=\frac{x^2-4x+3}{2x^2+5x-7}$

12. $y=\sin\frac{1}{x+1}$

13. $y=\frac{5x^2-4x-1}{x^2+5x-6}$

14. $y=\frac{|x|}{x}$

15. $y=\frac{4x^2-3x-1}{2x^2+3x-5}$

16. $y=2^{\frac{2}{|x+3|}}$

17. $y=\frac{2x^2-7x+5}{x^2-3x+2}$

18. $y=\frac{|\sin x|}{x}$

19. $y=\frac{2x^2+7x-9}{2x^2+3x-5}$

20. $y=\frac{1}{\ln(2-x)}$

21. $y=\frac{3x^2-7x+4}{x^2-4x+3}$

22. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$

23. $y=\frac{4x^2-7x+3}{x^2-5x+4}$

24. $y=\frac{e^x-1}{x}$

25. $y=\frac{5x^2-7x+2}{x^2-6x+5}$

26. $y=\frac{1}{1-\ln x}$

27. $y=\frac{2x^2-9x+7}{x^2-7x+6}$

28. $y=\frac{x}{\sin|x|}$

29. $y=\frac{3x^2-5x+2}{x^2+3x-4}$

30. $y=\frac{x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$

VI. Знайти похідну функції

1. $y=2^{\arcsin\sqrt{x}}$

2. $y=\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\operatorname{tg}2x}$

3. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{3-2x}$

4. $y=\arccos x\cdot\sin^2 3x$

5. $y=\operatorname{tg}^5 x\cdot\sqrt[3]{3-2x}$

6. $y=\frac{e^{5-3x}}{\sqrt{\operatorname{arcctg}x}}$

7. $y=\ln(3x+\sqrt[3]{\sin 5x})$

8. $y=\frac{\operatorname{ctg}3x}{\arcsin(x^2)}$

9. $y=\sqrt[3]{1-\sin 2x}\cdot\ln(1+\operatorname{ctg}x)$

10. $y=e^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\cos^5 3x$

11. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\log_5 x$

12. $y=\sqrt[5]{\arcsin 3x}\cdot \operatorname{tg}^3 x$

13. $y=\frac{\operatorname{arctg}2x}{\ln(\sin 3x)}$

14. $y=\ln(\arcsin x+e^{\frac{1}{x}})$

15. $y=\sqrt[4]{\frac{\arccos x}{x+7}}$

16. $y=\log_2(\sqrt{x}+\cos 3x)$

17. $y=\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{\arcsin x}$

18. $y=3^{\sqrt{x+\sin 2x}}$

19. $y=\cos^3 2x\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2x}$

20. $y=(3\operatorname{tg}2x+\cos 5x)\cdot e^{-\sqrt{x}}$

21. $y=\frac{\operatorname{tg}x}{\ln(1+\sqrt{x})}$

22. $y=\sin\frac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg}(x+7)$

23. $y=\frac{\sin^2 x}{\arccos 2x}$

24. $y=\frac{\sqrt[3]{x}\cdot}{\ln(x^2+x)}$

25. $y=\log_2(\arcsin x+\sqrt[5]{x})$

26. $y=\operatorname{tg}\sqrt[3]{1+\ln x}$

27. $y=\cos\frac{\sqrt{x}}{e^{x-2}}$

28. $y=5^{x\cdot\sin^2 3x}$

29. $y=\sqrt[3]{\ln(x+\operatorname{arctg}x)}$

30. $y=e^{2-x}\cdot\sqrt[3]{5x^2-x}$

VII. Обчислити наближено з допомогою диференціала

1. $\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+0{,}03\right)}$

2. $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-0{,}02\right)$

3. $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+0{,}04\right)$

4. $\sqrt{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-0{,}03\right)}$

5. $\sqrt{\frac{5-1{,}03}{1{,}03}}$

6. $\sqrt{4+\arcsin 0{,}02}$

7. $\sqrt{9+\ln 0{,}97}$

8. $\frac{1}{\sqrt[3]{8-\operatorname{arctg}0{,}04}}$

9. $\sqrt[3]{(1{,}96)^2+1{,}96+2}$

10. $\sqrt[4]{15+e^{-0{,}03}}$

11. $\ln(1-\sin 0{,}002)$

12. $\sqrt{2\cdot(0{,}97)^2-3\cdot 0{,}97+5}$

13. $\sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+0{,}04\right)}$

14. $\ln \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-0{,}03\right)$

15. $\sqrt[3]{\frac{9-1{,}03}{1{,}03}}$

16. $\sqrt{4+\arcsin 0{,}02}$

17. $\sqrt{9+\ln 0{,}97}$

18. $\frac{1}{\sqrt[3]{8-\operatorname{arctg} 0{,}04}}$

19. $\ln\left(\frac{1}{2}+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+0{,}001\right)\right)$

20. $\sqrt[4]{15+e^{-0{,}03}}$

21. $e^{\operatorname{arctg}(0{,}02)}$

22. $\sqrt{(1{,}98)^2+1{,}98+3}$

23. $\frac{1}{1-\sin(0{,}01)}$

24. $\cos^2(\frac{\pi}{4}+0{,}01)$

25. $\frac{4}{\sqrt{2{,}97+1}}$

26. $\sqrt{3+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+0{,}02\right)}$

27. $\sqrt{\frac{3{,}98}{1{,}02}}$

28. $\ln(1-\operatorname{tg} 0{,}002)$

29. $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}+0{,}04\right)$

30. $\sqrt[3]{3(2{,}04)^2-2{,}04-2}$

VIII. Знайти дотичну даної функції в даній точці

1. $\begin{cases} x=\sin t \\ y=e^t \end{cases}$

в точці M(0; 1)

2. $y=\operatorname{arctg}(3x^2-2x)$

в точці з абсцисою x = 1

3. $\begin{cases} x=\cos t \\ y=t+\sin t \end{cases}$

в точці M(1; 0)

4. $y=\frac{1}{x}+\ln(3-\sqrt{x})$

в точці з абсцисою x = 4

5. $\begin{cases} x=1+\ln(2-t^2) \\ y=\frac{12}{\pi}\operatorname{arctg} t \end{cases}$

в точці M(1; 3)

6. $y=e^{\sin(x-1)}$

в точці з абсцисою x = 1

7. $\begin{cases} x=4\sin^2 t \\ y=4\cos^2 t \end{cases}$

в точці M(1; 3)

8. $y=\sqrt[3]{\frac{2x+4}{5-2x}}$

в точці з абсцисою x = 2

9. $\begin{cases} x = 2 + \ln t \\ y = \dfrac{2}{3 - t^2} \end{cases}$

в точці M(2; 1)

10. $y = x + \ln \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4}$

в точці з абсцисою x = 1

11. $\begin{cases} x = 1 + \ln \operatorname{ctg} t \\ y = 2\cos^2 t \end{cases}$

в точці M(1; 1)

12. $y = \sqrt{3 + \cos \dfrac{\pi x}{2} + \sin \dfrac{\pi x}{2}}$

в точці з абсцисою x = 1

13. $\begin{cases} x = 3t + 2e^t \\ y = e^{-2t} \end{cases}$

в точці M(2; 1)

14. $y = 1 + \ln\left(\sin \dfrac{\pi x}{2} + \cos \dfrac{\pi x}{2}\right)$

в точці з абсцисою x = 1

15. $\begin{cases} x = t + \ln t \\ y = \dfrac{8}{\pi} \operatorname{arctg} t \end{cases}$

в точці M(1; 2)

16. $y = \dfrac{\sqrt{5 - 2x}}{x}$

в точці з абсцисою x = 2

17. $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1 + t^2} \\ y = \dfrac{2t^2}{1 + t^2} \end{cases}$

в точці M(1; 1)

18. $y = \sqrt{x^3 + 1}$

в точці з абсцисою x = 2

19. $\begin{cases} x = 2 + \sin t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$

в точці M(2; 1)

20. $y = \arccos \sqrt{\dfrac{x}{4}}$

в точці з абсцисою x = 1

21. $y = \sqrt{x^3 + 1}$

в точці з абсцисою x = 2

22. $y = \operatorname{arctg}(3x^2 - 2x)$

в точці з абсцисою x = 1

23. $y = \arccos \sqrt{\dfrac{x}{4}}$

в точці з абсцисою x = 1

24. $y = \dfrac{1}{x} + \ln(3 - \sqrt{x})$

в точці з абсцисою x = 4

25. $y = e^{\sin(x - 1)}$

в точці з абсцисою x = 1

26. $y = \sqrt[3]{\dfrac{2x + 4}{5 - 2x}}$

в точці з абсцисою x = 2

27. $y = x + \ln \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4}$

в точці з абсцисою x = 1

28. $y = \sqrt{3 + \cos \dfrac{\pi x}{2} + \sin \dfrac{\pi x}{2}}$

в точці з абсцисою x = 1

29. $y = 1 + \ln\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \cos\frac{\pi x}{2}\right)$

в точці з абсцисою x = 1

30. $y = \frac{\sqrt{5 - 2x}}{x}$

в точці з абсцисою x = 2

IX. Знайти проміжки монотонності та екстремуми функції

1. $y = \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 5}$

2. $y = \sqrt{x}\ln x$

3. $y = (2x - 1)^2 (x + 2)^3$

4. $y = \sqrt[3]{x^2 + 8x - 9}$

5. $y = \frac{(3x - 2)^2}{(1 - x)^3}$

6. $y = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$

7. $y = 2x^2 - \ln x$

8. $y = x^2 - \ln(1 + 2x)$

9. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{16}{x^2}$

10. $y = (x - 5)^2 \cdot \sqrt[3]{(x + 1)^2}$

11. $y = \sqrt{3 + x} + \sqrt{5 - x}$

12. $y = (11 + x - x^2) \cdot e^{-x}$

13. $y = x\ln^2 x$

14. $y = \sqrt{(2x + 3)(x - 3)^2}$

15. $y = (x + 2)^2 (x - 1)^2$

16. $y = \sqrt[5]{x^2 + 10x - 11}$

17. $y = x^2 - 2x - 2\ln(x - 1)$

18. $y = \frac{(2x - 1)^2}{(x + 1)^3}$

19. $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$

20. $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

21. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

22. $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$

23. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^2 - 1}$

24. $y = (x^2 - 3x + 3) \cdot e^x$

25. $y = \frac{2}{3}x^2 \cdot \sqrt[3]{6x - 7}$

26. $y = x - \ln(1 + x^2)$

27. $y = \sqrt{(x + 4)(3x - 2)^2}$

28. $y = (x - 2)\sqrt{x - 1}$

29. $y = \frac{\sqrt{x - 1}}{x + 24}$

30. $y = x^2 \ln^2 x$

X. Знайти найбільше M та найменше m значення функції на відрізку

1. $y = x^3 + 9x^2 + 15x + 12$, $x \in [-6; 2]$,

2. $y = 4\sin 2x - 2\sin 4x$, $x \in [0; \pi]$,

3. $y = (x-3)^2 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}$, $x \in [0;\ 2]$,

4. $y = x^3 - 2x|x-2|$, $x \in [0; 3]$,

5. $y = \sqrt[3]{4 - x^2} - \sqrt[3]{x^2 + 1}$, $x \in [-3;\ 3]$,

6. $y = \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x$, $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$,

7. $y = 2 \cdot 3^{3x} - 4 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^x$, $x \in [-1; 1]$,

8. $y = e^{-2x}\cos 2x$, $x \in [0; \frac{3\pi}{4}]$,

9. $y = \cos^2 x \cdot \sin x$, $x \in [-\pi; \pi]$,

10. $y = 4x^3 - x|x-2|$, $x \in [0; 3]$,

11. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $x \in [-1; 2]$,

12. $y = xe^{-x}$, $x \in [0; 2]$,

13. $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$, $x \in [-4; -2]$,

14. $y = x - 2\sqrt{x-2}$, $x \in [2; 6]$,

15. $y = |x^2 + 2x - 3| + \frac{3}{2}\ln x$, $x \in [\frac{1}{2}; 4]$

16. $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$, $x \in [-2; 3]$,

17. $y = 2\sin 2x + \cos 4x$, $x \in [0; \frac{\pi}{3}]$,

18. $y = \sqrt{(2x+3)(x-3)^2}$, $x \in [-1;\ 4]$,

19. $y = -x^3 + 3x|x-3|$, $x \in [0; 4]$,

20. $y = \sqrt[3]{4x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$, $x \in [-2;\ 2]$,

21. $y = 2\cos x - \cos 2x$, $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$,

22. $y = 2 \cdot 2^{3x} - 9 \cdot 2^{2x} + 12 \cdot 2^x$, $x \in [-1; 1]$,

23. $y = e^{2x} + e^{-2x}$,
$x \in [-2;1]$,

24. $y = \sin 2x \cdot \sin x$,
$x \in [-\pi;\pi]$,

25. $y = -5x^3 + x|x-1|$,
$x \in [0;2]$,

26. $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$,
$x \in [-1;1]$,

27. $y = x^2 e^{-x}$,
$x \in [-1;3]$,

28. $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$,
$x \in [-4;0]$,

29. $y = x + 2\sqrt{3-x}$,
$x \in [-1;3]$,

30. $y = |x^2 + x - 2| - \ln\dfrac{1}{x}$,
$x \in [\frac{1}{2};2]$

ЛІТЕРАТУРА

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., Наука, 1975.
2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., Наука, 1984.
3. Виленкин Н. Я., Куницкая Е. С., Мордкович А. Г. Математический анализ. Интегральное исчисление. М., Просвещение, 1979.
4. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах, ч.1. М., Высшая школа, 1967.
5. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., Наука, 1990.
6. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М., Высшая школа, 1966.
7. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, ч. 1. М., Физматлит, 2005.
8. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, т. 1. М., Высшая школа, 1981
9. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Математический анализ: Введение в анализ, производная, интеграл. Справочное пособие по высшей математике, т. 1. М., Едиториал УРСС, 2001.
10. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т. 1, М., Наука, 1976.
11. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1. М., Физматлит, 2001.
12. Шкіль М. І. Математичний аналіз, ч. 1. К., Вища школа, 1994.

ЗМІСТ